Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

3. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 3.1 Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$.

(a) Seien c_i reelle Zahlen mit $0 \leq c_i \leq b-1$. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} c_i b^i \leq b^{n+1} - 1.$$

Lösung:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i b^i \leq \sum_{i=0}^{n} (b-1) b^i = \left(\sum_{i=1}^{n+1} b^i \right) - \left(\sum_{i=0}^{n} b^i \right) = b^{n+1} - 1.$$

(b) Zeigen Sie, dass jede Zahl $x \in \mathbb{N}$ einde eindeutige Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=0}^{n} c_i b^i$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $c_i \in \{0, ..., b-1\}$ besitzt.

Existenz: Sei $n = \max\{i \in \mathbb{N}_0 : b^i \leq x\}$ und sei $c_n = \max\{c \in \mathbb{N} : cb^n \leq x\}$. Es gilt $x_n := x - c_n x^n < b^n$. Für $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n-1$ definiere rekursiv $c_i := \max\{c \in \mathbb{N}_0 : cb^i \leq x_{i+1}\}$ und $x_i = x_{i+1} - c_i b^i$. Bemerke, dass $0 \leq c_i \leq b-1$ und $x_0 = 0$. Es gilt

$$x = c_n b^n + x_n = c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + x_{n-1} = \cdots = \sum_{i=0}^{n} c_i b^i + x_0 = \sum_{i=0}^{n} c_i b^i.$$

Eindeutigkeit: Sei $n \in \mathbb{N}$. Nehme an, dass x Darstellungen der Form $x = \sum_{i=0}^{n} c_i b^i$ und $x = \sum_{i=0}^{n} d_i b^i$ mit $c_i, d_i \in \{0, ..., b-1\}$ besitzt. Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (c_i - d_i) b^i = 0.$$

Nehme an, dass es ein $i \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $c_i \neq d_i$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürven wir annehmen, dass $c_n - d_n \neq 0$. Es gilt

$$b^n \leq |c_n - d_n| b^n = |(c_n - d_n) b^n| = \Big| - \sum_{i=0}^{n-1} (c_i - d_i) b^i \Big| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i - d_i| b^i < b^n.$$

Für die letzte Ungleichung haben wir die Tatsache, dass $0 \leq |c_i - d_i| \leq b-1$ und die Ungleichung in (a) verwendet.

Präsenzaufgabe 3.3 Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften eines ageordneten Körpers $(K, +, \cdot, <)$:

(a) $x > 0, y < 0 \Longrightarrow xy < 0$,
Beweis: Weil $y < 0$ gilt $0 = y + (-y) < 0 + (-y) = -y$ und damit $-xy = x(-y) > 0$. Jetzt gilt $0 = -xy + xy > 0 + xy = xy$.

(b) $x > 1 \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1$,
Beweis: Nehme an, dass $x > 1$. Wenn $\frac{1}{x} \leq 0$, dann nach (a) $1 = x\frac{1}{x} \leq 0$. Darum gilt $\frac{1}{x} > 0$. Wenn $1 - \frac{1}{x} \leq 0$ wäre, hätten wir in gleicher Weise $x - 1 = x(1 - \frac{1}{x}) \leq 0$ und damit $x \leq 1$. Darum gilt $1 - \frac{1}{x} > 0$ und damit $\frac{1}{x} < 1$.
Nehme an, dass $0 < \frac{1}{x} < 1$. Wenn $x \leq 0$ wäre, dann nach (a) $1 = x\frac{1}{x} \leq 0$. Darum gilt $x > 0$. Weil $\frac{1}{x} < 1$, gilt $\frac{1}{x} - 1 < 0$. Nach (a), $1 - x = x(\frac{1}{x} - 1) < 0$. Darum gilt $x > 1$.

(c) $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2 \Longrightarrow x_1 + x_2 < y_1 + y_2$.
Beweis: $x_1 < y_1$ und damit $x_1 + x_2 < y_1 + x_2$. Weil $x_2 < y_2$, gilt $y_1 + x_2 < y_1 + y_2$. Wegen Transitivität gilt $x_1 + x_2 < y_1 + y_2$.

Präsenzaufgabe 3.4 Sei K ein angeordneter Körper und $a, b, c, d \in K$ mit $b > 0$ und $d > 0$. Man zeige:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Beweis: Aus $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} > 0$ folgt mit $b, d > 0$:

$$bc - ad = \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) bd > 0.$$

Also

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bc - bd}{b(b+d)} > 0$$

da der Nenner positiv ist. Ebenso

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{c(b+d) - (a+c)d}{d(b+d)} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} > 0.$$

Hausaufgabe 3.1

(b) Stellen Sie die folgende Dualzahl im Hexadezimalsystem dar:

1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.

Lösung: $F.FFF.FFF.FFF.FFF$.

Hausaufgabe 3.2

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1.$$

Beweis: Für $n = 1$ gilt $1 = \sum_{i=0}^{1} i \cdot i! = (1+1)! - 1$. Nehme an, dass $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$. Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n+1} i \cdot i! = (n+1)\ (n+1)! + \sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)\ (n+1)! + (n+1)! - 1. = (n+2)! - 1.$$

(b) Folgern Sie, dass jede Zahl $x \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot i!$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \{0, 1, ..., i\}$ besitzt.
Beweis: Existenz und Eindeutigkeit folgen in ähnlicher Weise wie in Präsenzaufgabe 4.1(b).

Hausaufgabe 3.3 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel) Zeigen Sie: Für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Beweis: Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Nehme an, dass $n \in \mathbb{N}$ und dass die Ungleichung gilt für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Seien jetzt $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $x_{n+1} \geq x_i$ für $i = 1, \ldots n$. Sei $x_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Bemerke, dass $x_{n+1} \geq x_a$. Es gilt

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} = \left(\frac{nx_a + x_{n+1}}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x_{n+1} - x_a}{(n+1)x_a}\right)^{n+1}.$$

Nach der Bernoullische Ungleichung gilt

$$\left(1 + \frac{x_{n+1} - x_a}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} \geq (n+1)\frac{x_{n+1}}{(n+1)x_a} = \frac{x_{n+1}}{x_a}.$$

Jetzt gilt

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{x_a}$$

und damit

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{n+1} = x_a^{n+1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} \geq x_a^{n+1}\frac{x_{n+1}}{x_a} = x_a^n x_{n+1}$$

Nach der Voraussetzung gilt $x_a^n \geq \prod_{i=1}^n x_i$. Darum

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{n+1} \geq \prod_{i=1}^{n+1} x_i.$$

Hausaufgabe 3.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Definiere für $i = 1, \ldots, n$

$$X_i := \frac{|x_i|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} \quad \text{und} \quad Y_i := \frac{|y_i|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}}$$

Aus die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel folgt

$$X_i Y_i \leq |X_i|\ |Y_i| = \sqrt{X_i^2 Y_i^2} \leq \frac{1}{2}(X_i^2 + Y_i^2).$$

Darum gilt

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sum_{j=1}^n x_j^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sum_{j=1}^n y_j^2}\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1.$$

Es folgt

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,|y_i| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}\sum_{i=1}^n X_i Y_i \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}.$$