Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

4. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 4.1 Bestimmen Sie Supremum und Infimum folgender Mengen:

(a) $A = \{(-1)^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $B = \{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$,

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} : 0 < \left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 1\}$.

Präsenzaufgabe 4.2 Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = 2$.

Präsenzaufgabe 4.3 Gegeben sei die Menge

$$M := \left\{\frac{1+|x|}{3+x^2} : x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Bestimmen Sie $\sup M$ und $\inf M$.

Präsenzaufgabe 4.4 Für zwei Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ sei

$$X \cdot Y := \{xy : x \in X, y \in Y\}.$$

Zeigen Sie: Sind X und Y nach oben beschränkt, so gilt

$$\sup(X \cdot Y) = \sup(X)\sup(Y).$$

Präsenzaufgabe 4.5 Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen:

(a) $(x+iy)^3 - (x-iy)^3$ für $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $(2+i)^{-1}$,

(c) $\frac{i}{1+i}$.

Präsenzaufgabe 4.6 Geben Sie eine geometrische Beschreibung der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ an und skizzieren Sie diese:

(a) $M = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 + 2i| = 5\}$,

(b) $N = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq |z - 1|\}$,

(c) $P = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Hausaufgabe 4.1 Beweisen Sie die Aussagen (2) und (3) von Satz 2.24 im Skript von Müller.

Hausaufgabe 4.2 Gegeben sei die Menge

$$A := \left\{ \frac{|1-xy|}{(1+x^2)(1+y^2)} : x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \right\}.$$

Bestimmen Sie $\sup A$ und $\inf A$. Existieren $\max A$ und $\min A$?

Hausaufgabe 4.3

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und sei $-A := \{-x : x \in A\}$. Zeigen Sie:

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

(b) Sei I eine Menge und für $i \in I$, sei $A_i \subseteq \mathbb{R}$. Nehme an, dass $m_i := \sup A_i$ existiert. Beweisen Sie: Wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass $m_i \leq C$ für alle $i \in I$, dann existiert das Supremum von $\bigcup_{i \in I} A_i$ und

$$\sup\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \sup\{m_i : i \in I\}.$$

Hausaufgabe 4.4 Berechnen Sie Real- und Imaginärteil und Betrag von

$$z_n := \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$$

für $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Zeige erst, dass z_n nur von der Äquivalenzklasse $n + 8\mathbb{Z}$ von n in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ abhängt.

Hausaufgabe 4.5 Für $c = a + ib \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zeige man, dass die Gleichung $z^2 = c$ genau zwei Lösungen besitzt, und stelle diese Lösungen durch a und b dar.

Hausaufgabe 4.6 Sei G eine Gruppe. Eine nichtleere Teilmenge H von G is eine *Untergruppe* von G, wenn zu zwei beliebigen Elementen in H auch deren Verknüpfung in H ist, und mit jedem Element in H auch dessen Inverses. Seien H_1 und H_2 Untergruppen von G. Beweisen Sie den folgenden Satz. Wenn $G = H_1 \cup H_2$, dann $G = H_1$ oder $G = H_2$.
Hinweis: Im Fall $H_1 \not\subseteq H_2$ und $H_2 \not\subseteq H_1$, betrachte das Produkt $h_1 h_2$ von Elementen $h_1 \in H_1 \setminus H_2$ und $h_2 \in H_2 \setminus H_1$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 8.11.2019, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.