Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

4. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 4.2 Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = 2$.

Lösung: Behauptung: Es gilt $s_n = 2 - 2^{-n}$. Die Behauptung ist offensichtlich wahr für $n = 0$. Wenn die Behauptung wahr ist für ein $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $s_{n+1} = s_n + 2^{-n-1} = 2 - 2^{-n} + 2^{-n-1} = 2 - 2^{-n-1}$. Damit ist die Behauptung Bewiesen.

(a) $s_n = 2 - 2^{-n} < 2$.

(b) Nach (a) gilt $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} \leq 2$. Sei $\epsilon > 0$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$, sodass $2^{-n} < \epsilon$. Es gilt $s_n = 2 - 2^{-n} > 2 - \epsilon$. Weil dies gilt für alle $\epsilon > 0$, gilt $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} \geq 2$.

Präsenzaufgabe 4.3 Gegeben sei die Menge

$$M := \left\{ \frac{1 + |x|}{3 + x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie $\sup M$ und $\inf M$.
Lösung: Bemerke, dass

$$M = \left\{ \frac{1 + x}{3 + x^2} : x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \right\}.$$

Weil $(x - 1)^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, gilt $x^2 + 3 \geq 2x + 2$ und damit $\frac{1+x}{3+x^2} \leq \frac{1}{2}$. Auch gilt $\frac{1+|1|}{3+1^2} = \frac{1}{2}$ und damit $\sup(M) = \frac{1}{2}$. Weiter gilt

$$\frac{\frac{1}{|x|} + 1}{\frac{3}{x^2} + 1} \leq 2$$

für $x > 1$, so dass

$$\frac{1 + |x|}{3 + x^2} = \frac{1}{|x|} \frac{\frac{1}{|x|} + 1}{\frac{3}{x^2} + 1} \leq \frac{2}{|x|}.$$

Für jede $\epsilon > 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{2}{|x|} < \epsilon$. Darum ist jede untere Schranke von M kleiner oder gleich an 0. Weil $M \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, gilt $\inf(M) = 0$.

Hausaufgabe 4.1 Beweisen Sie die Aussagen (2) und (3) von Satz 2.24 im Skript von Müller.

Beweis:

(2) Wenn $a > b$ und $s \in \mathbb{N}$, dann gilt $a > b$ genau dann, wenn $a^s > b^s$. Sei $r \in \mathbb{Q}$ und seien $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x < y$. Wir schreiben $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Wenn $r > 0$, dann $p \in \mathbb{N}$ und es gilt
$$(x^r)^q = x^p < y^p = (y^r)^q.$$
Darum $x^r < y^r$. Wenn $r < 0$, dann $p < 0$ und es gilt
$$(x^r)^{-q} = x^{-p} < y^{-p} = (y^r)^{-q}.$$
Dies zeigt, dass
$$(x^r)^q = \frac{1}{(x^r)^{-q}} > \frac{1}{(y^r)^{-q}} = (y^r)^q$$
und damit $x^r > y^r$.

(3) Wenn $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $p \in \mathbb{Q}_{>0}$, dann gilt nach (2), dass $x > 1$ genau dann, wenn $x^p > 1$. Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $r < s$. Wenn $a > 1$, dann
$$a^{s-r} > 1$$
und damit
$$a^s = a^r a^{s-r} > a^r.$$
Wenn $a < 1$, dann $\frac{1}{a} > 1$. Weil $-s < -r$, gilt
$$a^s = \left(\frac{1}{a}\right)^{-s} < \left(\frac{1}{a}\right)^{-r} = a^r.$$

Hausaufgabe 4.3

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und sei $-A := \{-x : x \in A\}$. Zeigen Sie:
$$\sup(-A) = -\inf A.$$

(b) Sei I eine Menge und für $i \in I$, sei $A_i \subseteq \mathbb{R}$. Nehme an, dass $m_i := \sup A_i$ existiert. Beweisen Sie: Wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass $m_i \leq C$ für alle $i \in I$, dann existiert das Supremum von $\bigcup_{i \in I} A_i$ und
$$\sup\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \sup\{m_i : i \in I\}.$$

Lösung:

(a) Für alle $x \in A$ gilt $x \geq \inf(A)$ und damit $-x \leq -\inf(A)$. Dies zeigt, dass $-\inf(A)$ eine obere Schranke von $-A$ ist. Sei C eine ober Schranke von $-A$ mit $C \leq -\inf(A)$. Für alle $x \in A$ gilt $-x \leq C$ und darum $x \geq -C$. Nun ist $-C$ eine untere Schranke von A und darum $-C \leq \inf(A)$. Es folgt $C = -\inf(A)$. Dies zeigt, dass $-\inf(A)$ die kleinste obere Schranke von $-A$ ist.

(b) Für jede $x \in A := \bigcup_{i \in I} A_i$ gibt es ein $i \in I$, sodass $x \in A_i$. Es gilt $x \le m_i \le C$. Dies zeigt, dass A nach oben beschränkt ist and darum ein Supremum besitzt. Wenn $x \in A_i$, dann $x \le m_i \le m := \sup\{m_i : i \in I\}$. Weil dies gilt für alle $i \in I$, ist m eine Obere Schranke von A. Sei $s \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von A mit $s \le m$. Wenn $s < m$, dann gibt es ein $i \in I$, sodass $s < m_i \le m$. Es existiert ein $x \in A_i \subseteq A$, sodass $s < x \le m_i$. Dies ist ein Widerspruch and darum folgt, dass m die kleinste obere Schranke von A ist.

Hausaufgabe 4.5 Für $c = a + ib \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zeige man, dass die Gleichung $z^2 = c$ genau zwei Lösungen besitzt, und stelle diese Lösungen durch a und b dar. *Lösung:* Schreibe $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wenn $z^2 = c$, gilt

$$x^2 - y^2 - a + i(2xy - b) = (x + iy)^2 - a - ib = 0$$

und damit $x^2 - y^2 = a$ und $2xy = b$. Es gilt $x^2 = a + y^2$. Darum

$$b^2 = 4x^2y^2 = 4(a + y^2)y^2 = 4y^4 + 4ay^2$$

und damit

$$y^2 = \frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 + 16b^2}}{8} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Weil $\sqrt{a^2 + b^2} \ge |a|$, und $y^2 \ge 0$ gilt

$$y^2 = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \quad \text{und} \quad x^2 = a + y^2 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Diese beide Gleichungen bestimmen $|x|$ und $|y|$. Wenn $b \ge 0$, dann

$$(x, y) = \left(\pm\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \pm\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right).$$

Wenn $b \le 0$, dann

$$(x, y) = \left(\pm\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \mp\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right).$$

Hausaufgabe 4.6 Sei G eine Gruppe. Eine nichtleere Teilmenge H von G is eine *Untergruppe* von G, wenn zu zwei beliebigen Elementen in H auch deren Verknüpfung in H ist, und mit jedem Element in H auch dessen Inverses. Seien H_1 und H_2 Untergruppen von G. Beweisen Sie den folgenden Satz. Wenn $G = H_1 \cup H_2$, dann $G = H_1$ oder $G = H_2$. *Beweis:* Wenn $H_1 \subseteq H_2$, dann $G = H_1 \cup H_2 = H_2$ und wenn $H_2 \subseteq H_1$, dann $G = H_1 \cup H_2 = H_1$. Nehme jetzt an, dass $H_1 \not\subseteq H_2$ und $H_2 \not\subseteq H_1$. Seien $h_1 \in H_1 \setminus H_2$ und $h_2 \in H_2 \setminus H_1$. Weil $G = H_1 \cup H_2$, ist $h_1 h_2$ enthalten in H_1 oder in H_2. Wenn $h_1 h_2 \in H_1$, dann $h_2 = h_1^{-1} h_1 h_2 \in H_1$. Dies ist ein Widerspruch. Wenn $h_1 h_2 \in H_2$, dann $h_1 = h_1 h_2 h_2^{-1} \in H_2$. Dies ist auch ein Widerspruch.