Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

6. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 6.1 Für $k \in \mathbb{N}$, sei $a_k \in \mathbb{R}$. Nehme an, dass $\sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ und $\inf\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ existieren. Definiere

$$s_n := \sup\{a_k : k \geq n\},$$
$$i_n := \inf\{a_k : k \geq n\}.$$

(a) Zeige, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und die Folge $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist.

(b) Zeige, dass die Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Wir schreiben s und i für die Limes.

(c) Sei $\mathcal{H}$ die Menge von Häufungspunkten von $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Zeige

$$\sup \mathcal{H} = s \quad \text{und} \quad \inf \mathcal{H} = i.$$

Lösung: Wir beweisen die Aussagen für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Beweisen für die Aussagen für $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind ähnlich.

(a) Wenn $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, dann ist jede obere Schranke von B auch eine obere Schranke von A. Es folgt, dass $\sup(A) \leq \sup(B)$. Weil $\{a_k : k \geq n+1\} \subseteq \{a_k : k \geq n\}$, gilt $s_{n+1} \leq s_n$.

(b) Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is von unten beschränkt durch $\inf\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Weil sie monoton fallend und beschränkt ist, ist sie konvergent.

(c) Sei $a \in \mathcal{H}$. Wir beweisen erst, dass $s \geq a$. Sei $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$, sodass $a_m \geq a - \epsilon$. Darum gilt $s_n \geq a - \epsilon$. Weil dies gilt für alle $\epsilon > 0$, folgt, dass $s_n \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $s \geq a$. Jetzt zeigen wir, dass $s \in \mathcal{H}$. Sei $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Es gibt $k \in \mathbb{N}$, sodass $|s_l - s| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $l > k$. Insbesondere gibt es ein $l > N$, sodass $|s_l - s| < \frac{\epsilon}{2}$. Weiter gibt es ein $n > l > N$, sodass $|a_n - s_l| < \frac{\epsilon}{2}$. Es folgt $|s - a_n| = |s - s_l + s_l - a_n| \leq |s - s_l| + |s_l - a_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Dies beweist, das $s \in \mathcal{H}$. Es folgt, dass $s = \sup(\mathcal{H})$.

Präsenzaufgabe 6.2

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Beweisen Sie, dass die Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$G_n := \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

der geometrischen Mittel gegen a konvergiert.

(b) Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = e.$$

Lösung:

(a) Sei $\epsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > N$. Für diese n gilt

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{N} a_k}\sqrt[n]{\prod_{k=N+1}^{n} a_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{N} a_k}\sqrt[n]{\prod_{k=N+1}^{n}\left(a+\frac{\epsilon}{2}\right)} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{N} a_k}\ \left(a+\frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{n-N}{n}}$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{N} a_k} = 1$ und $\lim_{n\to\infty}(a+\frac{\epsilon}{2})^{-\frac{N}{n}} = 1$ and damit

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{N} a_k}\ \left(a+\frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{n-N}{n}} = a+\frac{\epsilon}{2}.$$

Es gibt darum ein $N' > N$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N'$

$$G_n \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{N} a_k}\ \left(a+\frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{n-N}{n}} \leq a+\epsilon.$$

Wenn $a > 0$ findet man auf ähnliche Weise, dass es ein $N'' \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $G_n \geq a-\epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N''$. Es folgt, dass für alle $\epsilon > 0$ es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a-\epsilon \leq G_n \leq a+\epsilon$ falls $n > N$. Wenn $a = 0$, dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $0 \leq G_n \leq \epsilon$ für alle $n > N$. In beide Fälle folgt, dass $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

(b) Sei $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Wir beweisen erst mit Induktion, dass $\prod_{k=1}^{n} a_k = \frac{(n+1)^n}{n!}$. Für $n = 1$ gilt $a_1 = 2 = \frac{(1+1)^1}{1!}$. Nehme an, dass $\prod_{k=1}^{n} a_k = \frac{(n+1)^n}{n!}$. Dann gilt

$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1}\frac{(n+1)^n}{n!} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dies beweist die Behauptung. Jetzt gilt

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}(n+1)\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} n\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}n\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = e.$$

Präsenzaufgabe 6.3 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c < 1$. Es gelte $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq c|a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, also konvergiert. Ferner ermittle man eine divergente Folge mit $|a_{n+2} - a_{n+1}| < |a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Lösung: Es gilt

$$|a_n - a_{n-1}| \leq c|a_{n-1} - a_{n-2}| \leq c^2|a_{n-2} - a_{n-3}| \leq \cdots \leq c^{n-2}|a_2 - a_1|$$

und damit folgt für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= |\sum_{k=m+1}^{n} a_k - a_{k-1}| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k - a_{k-1}| \leq \left(\sum_{k=m+1}^{n} c^{k-2}\right)|a_2 - a_1| \\ &= c^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{n-m-1} c^k\right)|a_2 - a_1| \leq c^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c^k\right)|a_2 - a_1| \leq c^{m-1}\frac{1}{1-c}|a_2 - a_1|.\end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$. Weil $0 < c < 1$, konvergiert die Folge $(c^{m-1}\frac{1}{1-c}|a_2 - a_1|)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Darum gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $c^{m-1}\frac{1}{1-c}|a_2 - a_1| < \epsilon$ für alle $m > N$. Dies zeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Jede Cauchy-Folge ist konvergent. Die Folge $(a_n = \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent und hat die Eigenschaft, dass $|a_{n+2} - a_{n+1}| < |a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hausaufgabe 6.1 Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch keine Primzahl p mit $p \neq 3$ und $p \neq 7$ teilbar sind. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{n\in\Omega} \frac{1}{n} = \frac{7}{4}.$$

Lösung: Es gilt $\Omega = \{3^k 7^l : k, l \in \mathbb{N}_0\}$ und damit

$$\sum_{n\in\Omega} \frac{1}{n} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \sum_{l\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{3^k 7^l} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{3^k}\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{7^l}\right) = \frac{1}{1-3^{-1}}\frac{1}{1-7^{-1}} = \frac{7}{4}.$$

Hausaufgabe 6.2 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nehme an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist. Zeige, dass $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
Lösung: Sei $\epsilon > 0$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent. Darum ist $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Es gibt also eine $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m \geq N$ gilt

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right) < \epsilon$$

Da die Folge monoton fallend ist, gilt $a_{2n} \leq a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq 2n$ und damit $na_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$. Für $n \geq N$ folgt, dass

$$na_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \epsilon.$$

Hausaufgabe 6.3 Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Reihen mit positiven Summanden. Man zeige: Gibt es $K, L \in \mathbb{R}$, $0 < K < L$, mit $K < \frac{a_n}{b_n} < L$ für alle n, so gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ ist konvergent.}$$

Lösung: Nehme an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent (und damit absolut konvergent) ist. Es gilt $0 \leq a_n \leq L b_n$. Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} L b_n$ is absolut konvergent, da $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ absolut konvergent ist. Nach dem Majorantenkriterium ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Nehme jetzt an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent (und damit absolut konvergent) ist. Es gilt $0 \leq b_n \frac{1}{K} a_n$. Nach dem Majorantenkriterium ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent.

Hausaufgabe 6.5 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge. Zeigen Sie den *Verdichtungssatz von Cauchy*: Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ konvergent ist.

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass die Folge monoton fallend ist. Es gilt

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n} \leq 2 \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k.$$

Es folgt

$$\sum_{k=2}^{2^N} a_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq \sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$
$$\sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{N} 2 \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k = 2 \sum_{k=2}^{2^N} a_k \leq 2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k.$$

Die Aussage folgt jetzt aus dem Monotoniekriterium.