Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

8. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 8.1 Für $p > 0$, sei $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Wir definieren $\|x\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(a) Für $p \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$, sei $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch

$$d_p(x, y) := \|x - y\|_p \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

Zeigen Sie, dass d_1, d_2 und d_∞ Metriken auf $\mathbb{R}^n$ definieren. *Hinweis:* Für $\|\cdot\|_2$ kann man die Cauchy-Schwarsche Ungleichung verwenden.

Lösung: Wir beweisen nur die Dreiecksungleichung für $p = 2$. Definiere

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Es gilt $\|x\|_2^2 = \langle x, x\rangle$. Bemerke, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \text{und} \quad \langle x, y + \lambda z\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\langle x, z\rangle$$

und, dass nach der Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gilt $|\langle x, y\rangle \leq \|x\|_2\|y\|_2$. Darum

$$\begin{aligned}
\|x - y\|_2^2 &= \|(x - z) + (z - y)\|_2^2 = \langle(x - z) + (z - y), (x - z) + (z - y)\rangle \\
&= \langle(x - z), (x - z)\rangle + 2\langle(x - z), (z - y)\rangle + \langle(z - y), (z - y)\rangle \\
&\leq \|x - z\|_2^2 + 2|\langle(x - z), (z - y)\rangle| + \|z - y\|_2^2 \\
&\leq \|x - z\|_2^2 + 2\|x - z\|_2\|z - y\|_2 + \|z - y\|_2^2 = \big(\|x - z\|_2 + \|z - y\|_2\big)^2
\end{aligned}$$

und damit

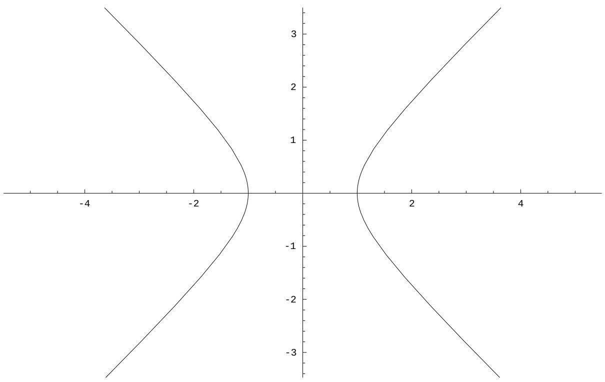
$$\|x - y\|_2 \leq \|x - z\|_2 + \|z - y\|_2.$$

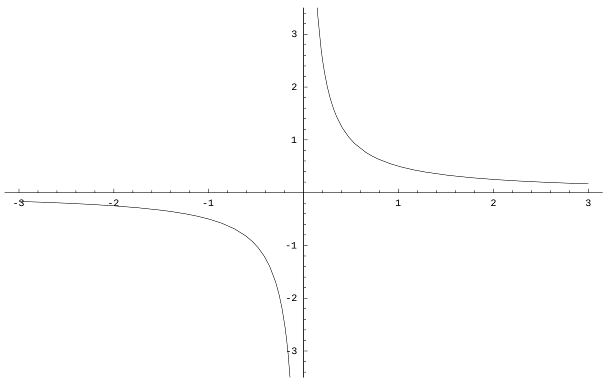
Präsenzaufgabe 8.3 Geben Sie eine geometrische Beschreibung der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ an und skizzieren Sie diese:

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) = 1\}$,

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^2) = 1\}$.

Lösung:





(a) (b)

Präsenzaufgabe 8.4 Beweisen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass $\cos(x) = 0$.
Lösung: Sei $x > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) - \left(\frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!}\right) - \left(\frac{x^{10}}{10!} - \frac{x^{12}}{12!}\right) - \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7 \cdot 8}\right) - \frac{x^{10}}{10!}\left(1 - \frac{x^2}{11 \cdot 12}\right) - \dots\end{aligned}$$

Es gilt $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} < 0$ genau dann, wenn $\sqrt{6 - \sqrt{12}} < x < \sqrt{6 + \sqrt{12}}$. Bemerke, dass $1 - \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} > 0$ für alle $x < \sqrt{6 + \sqrt{12}} < \sqrt{56}$ und $k \geq 3$. Darum gilt $\cos(x) < 0$ für $x \in (\sqrt{6 - \sqrt{12}}, \sqrt{6 + \sqrt{12}})$. Weil $\cos(0) = 1 > 0$ gibt es nach der Zwischenwertsatz ein $x > 0$, sodass $\cos(x) = 0$.

Hausaufgabe 8.1 Für $s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, sei $B_s(z)$ die Binomialreihe

$$B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k,$$

wobei $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{k!}$.

(a) Sei $s \in \mathbb{R}$ und sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen, die monoton wächst und gegen s konvergiert. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} B_{s_n}(x) = B_s(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $B_s(x) = (1+x)^s$.

Lösung:

(a) Wir betrachten erst den Fall $s = 0$. Wir dürven annehmen, dass $-1 < s_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bemerke, dass

$$\left| s_n^{-1} \binom{s_n}{k} \right| = \frac{(1-s_n)(2-s_n)\dots(k-1-s_n)}{k!} = \frac{1-s_n}{2}\frac{2-s_n}{3}\dots\frac{k-1-s_n}{k} < 1.$$

Darum $\left|\binom{s_n}{k}\right| < s_n$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$|B_{s_n}(x) - B_0(x)| = \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s_n}{k} x^k \right) - 1 \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \binom{s_n}{k} \right| |x|^k \leq s_n \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{s_n |x|}{1-|x|}.$$

Weil $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, folgt $\lim_{n\to\infty} |B_{s_n}(x) - B_0(x)| = 0$ und damit $\lim_{n\to\infty} B_{s_n}(x) = B_0(x) = 1$.

Sei jetzt $s \in \mathbb{R}$. Nach Satz 5.20 im Skript von Müller gilt $B_u(x)B_v(x) = B_{u+v}(x)$ für alle $u, v \in \mathbb{C}$. Es folgt, dass $B_{s_n}(x) = B_s(x)B_{s_n-s}(x)$. Die Folge $(s_n - s)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein monoton wächsende Nullfolge. Es folgt $\lim_{n\to\infty} B_{s_n-s}(x) = 1$ und damit $\lim_{n\to\infty} B_{s_n}(x) = B_s(x) \lim_{n\to\infty} B_{s_n-s}(x) = B_s(x)$.

(b) Die Folge $\big((1+x)^{s_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $(1+x)^s$. Nach (a) konvergiert $\big(B_{s_n}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $B_s(x)$. Weil $s_n \in \mathbb{Q}$, gilt nach Folgerung 5.21 im Skript von Müller, dass $B_{s_n}(x) = (1+x)^{s_n}$. Darum gilt

$$B_s(x) = \lim_{n\to\infty} B_{s_n}(x) = \lim_{n\to\infty} (1+x)^{s_n} = (1+x)^s.$$

Hausaufgabe 8.3 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Folge, das heißt $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere die Potenzreihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(x)$.

(b) Ermittlen Sie eine explizite Darstellung der Funktion f.

Lösung:

(a) Nach Hausaufgabe 5.2 ist die Folge $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Die Konvergenzradius ist darum gleich an $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) - x^2 f(x) &= \left(\sum_{k=0} a_k x^k \right) - \left(\sum_{k=0} a_k x^{k+1} \right) - \left(\sum_{k=0} a_k x^{k+2} \right) \\ &= a_0 + a_1 x - a_0 x + \sum_{k=2} (a_k - a_{k-1} - a_{k-2}) x^k = 1 \end{aligned}$$

und damit $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < \frac{2}{1+\sqrt{5}}$.