Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

9. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 9.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Beweisen Sie, dass die Funktion $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ stetig ist.

Präsenzaufgabe 9.2 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche Implikationen bestehen zwischen den folgenden Aussagen:

(a) f ist im Punkt $x_0 \in [a, b]$ stetig.

(b) Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(c) Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b] \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Präsenzaufgabe 9.3

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ stetig ist.

(b) Beweisen Sie, dass für jede Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit Konvergenzradius R und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ gilt

$$\overline{P(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n \, \overline{z}^n.$$

Zeigen Sie, dass insbesondere

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Präsenzaufgabe 9.4 Geben Sie eine algebraische Beschreibung der Teilmenge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2 \right\}$$

von $\mathbb{C}$ und skizzieren Sie diese.

Präsenzaufgabe 9.5 Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Beweisen Sie, dass für alle $X, Y \subseteq B$ gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(X \cup Y) &= f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y), \\ f^{-1}(X \cap Y) &= f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y), \\ f^{-1}(X \setminus Y) &= f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y). \end{aligned}$$

Hausaufgabe 9.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Nehme an, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Beweisen Sie, dass die Funktion $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig ist.

Hausaufgabe 9.2 Ermittlen Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 9.3 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x < \sqrt{2} \\ 0, & \text{falls } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

stetig ist.

Hausaufgabe 9.4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Ziel ist es zu zeigen, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat. Man gehe dazu wie folgt vor:

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ sei der Sprung $s(x)$ bei x gegeben durch

$$s(x) := \inf\{f(y) : y > x\} - \sup\{f(y) : y < x\}.$$

Zeige, dass $s(x)$ definiert ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig bei x ist, wenn $s(x) = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass für jeden $\epsilon > 0$ die Menge $\{x \in \mathbb{R} : s(x) > \epsilon\}$ höchstens abzählbar ist. *Hinweis:* Nehme erst an, dass f beschränkt ist.

(d) Beweisen Sie jetzt, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat.

Hausaufgabe 9.5 Betrachte

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| + |z + 1| < 8\}.$$

(a) Leiten Sie eine Ungleichung aus der Definition von M ab, welche begründet, dass M das Innere einer Ellipse beschreibt.

(b) Was sind die Brennpunkte und was ist die Fadenlänge?

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 13.12.2019, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.