Universität Paderborn Wintersemester 2019–2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 1

9. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 9.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Beweisen Sie, dass die Funktion $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ stetig ist.
Lösung: Sei $x \in D$ und $\epsilon > 0$. Sei $\epsilon' > 0$ mit die Eigenschaft, dass $\big(|f(x)|+|g(x)|\big)\epsilon'+\epsilon'^2 < \epsilon$. Weil f und g stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$ für alle $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$. Für diese y gilt

$$\begin{aligned}|f(y)g(y) - f(x)g(x)| &= |f(y)\big(g(y) - g(x) + g(x)\big(f(y) - f(x)\big)| \\ &\leq \big|f(y)\big|\,\big|g(y) - g(x)\big| + \big|g(x)\big|\,\big|f(y) - f(x)\big|.\end{aligned}$$

Da $\epsilon' > |f(x) - f(y)| \geq |f(y)| - |f(x)|$, gilt

$$|f(y)g(y) - f(x)g(x)| < \big(\big|f(x)\big| + \epsilon'\big)\epsilon' + \big|g(x)\big|\epsilon' < \epsilon.$$

Dies beweist dass $f \cdot g$ stetig ist im Punkt x. Weil dies gilt für alle $x \in D$, ist $f \cdot g$ stetig.

Präsenzaufgabe 9.4 Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Beweisen Sie, dass für alle $X, Y \subseteq B$ gilt

(c) $f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$.

Lösung: Ein Element x ist genau dann in $f^{-1}(X \setminus Y)$ enthalten, wenn $f(x) \in X \setminus Y$. Dies ist äquivalent zu $f(x) \in X$ und $f(x) \notin Y$ und damit ist es äquivalent zu $x \in f^{-1}(X)$ und $x \notin f^{-1}(Y)$. Das Letzte ist genau dann der Fall, wenn $x \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$.

Hausaufgabe 9.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Nehme an, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Beweisen Sie, dass die Funktion $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig ist.
Lösung: Sei $x \in D$ und sei $\epsilon > 0$. Wenn $\epsilon' \to 0$, dann strebt $\xi\frac{|f(x)|+|g(x)|+\xi}{|g(x)|(|g(x)|-\xi)}$ gegen 0. Darum gibt es ein $\xi > 0$, sodass $\xi\frac{|f(x)|+|g(x)|+\xi}{|g(x)|(|g(x)|-\xi)} < \epsilon$. Weil f und g stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(y) - f(x)| < \xi$ und $|g(y) - g(x)| < \xi$ für alle $y \in D$ mit $|y - x| < \delta$. Für $y \in D$ mit $|y - x| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right| &= \left|\frac{f(y)g(x) - f(x)g(y)}{g(x)g(y)}\right| \leq \frac{|f(y)|\,|g(x)| + |f(x)|\,|g(y)|}{|g(x)|\,|g(y)|} \\ &\leq \frac{(|f(x)| + \xi)|g(x)| + |f(x)|(|g(x)| + \xi)}{|g(x)|(|g(x)| - \xi)} = \xi\frac{|f(x)| + |g(x)| + \xi}{|g(x)|(|g(x)| - \xi)} < \epsilon.\end{aligned}$$

Dies beweist, dass $\frac{f}{g}$ stetig ist im Punkt x. Weil dies gilt für alle $x \in D$, ist $\frac{f}{g}$ stetig.

Hausaufgabe 9.2 Ermittlen Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.
Lösung: Stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ können keinen Sprung haben (Siehe Hausaufgabe 9.4).

Darum sind alle stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ konstant. Jeder konstante Funktion ist stetig. Alle Funktionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ sind stätig.

Hausaufgabe 9.3 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x < \sqrt{2} \\ 0, & \text{falls } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

stetig ist.
Lösung: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Es gilt

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } 0, 1 \notin A, \\ (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}, & \text{falls } 0 \in A \text{ und } 1 \notin A, \\ (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}, & \text{falls } 0 \notin A \text{ und } 1 \in A, \\ \mathbb{Q}, & \text{falls } 0, 1 \in A. \end{cases}$$

Die Mengen $\emptyset$, $(\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$, $(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}$ sind alle offene Teilmengen von $\mathbb{Q}$. (Wichtig ist, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.) Darum sind alle Urbilder unter f, insbesondere die Urbilder offener Teilmengen von $\mathbb{R}$, offen. Dies beweist, dass f stetig ist.

Hausaufgabe 9.4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Ziel ist es zu zeigen, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat. Man gehe dazu wie folgt vor:

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ sei der Sprung $s(x)$ bei x gegeben durch

$$s(x) := \inf\{f(y) : y > x\} - \sup\{f(y) : y < x\}.$$

Zeige, dass $s(x)$ definiert ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig bei x ist, wenn $s(x) = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass für jeden $\epsilon > 0$ die Menge $\{x \in \mathbb{R} : s(x) > \epsilon\}$ höchstens abzählbar ist.

(d) Beweisen Sie jetzt, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat.

Lösung:

(a) Weil f monoton wachsend ist, ist die Menge $\{f(y) : y > x\}$ nach unten beschränkt durch $f(x)$. Die Menge $\{f(y) : y < x\}$ ist nach oben beschränkt durch $f(x)$. Darum existieren $\inf\{f(y) : y > x\}$ und $\sup\{f(y) : y < x\}$.

(b) Es gilt $f(x) \leq \inf\{f(y) : y > x\}$ und $f(x) \geq \sup\{f(y) : y < x\}$.

Wenn f stetig in x ist, strebt $f(y)$ gegen $f(x)$ wenn $y \to x$. Darum gilt $f(x) = \inf\{f(y) : y > x\}$ und $f(x) = \sup\{f(y) : y < x\}$ und damit $s(x) = 0$.

Nehme jetzt an, dass $s(x) = 0$. Dann $\inf\{f(y) : y > x\} = \sup\{f(y) : y < x\}$ und darum $f(x) = \inf\{f(y) : y > x\}$ und $f(x) = \sup\{f(y) : y < x\}$. Für jede $\epsilon > 0$ gibt es $v > x$ und $u < x$, sodass $f(v) < f(x) + \epsilon$ und $f(u) > f(x) - \epsilon$. Weil f monoton wachsend ist, gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $y \in [u, v]$. Sei $\delta = \min\{x - u, v - x\}$. Für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - x| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Dies beweist, dass f stetig ist in x.

(c) Sei $\epsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{Z}$, definiere $M_{\epsilon,n} := \{x \in [n, n+1) : s(x) > \epsilon\}$. Weil f monoton wachsend ist, gilt $f(n)+\epsilon|M_{\epsilon,n}| \leq f(n+1) < \infty$. Es folgt, dass $M_{\epsilon,n}$ endlich ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $M_\epsilon := \{x \in \mathbb{R} : s(x) > \epsilon\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} M_{\epsilon,n}$ eine abzählbare Vereinigung von endliche Mengen. Es ist jetzt einfach eine injektive Abbildung $M_\epsilon \to \mathbb{N}$ hin zu schreiben.

(d) Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : s(x) > 0\}$ ist die abzählbare Vereinigung der abzählbare Mengen $M_{\frac{1}{n+1}} \setminus M_{\frac{1}{n}}$ und ist damit abzählbar. Es ist einfach eine injektive Abbildung $\{x \in \mathbb{R} : s(x) > 0\} \to \mathbb{N}$ hin zu schreiben.

Hausaufgabe 9.5 Betrachte

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| + |z+1| < 8\}.$$

(a) Leiten Sie eine Ungleichung aus der Definition von M ab, welche begründet, dass M das Innere einer Ellipse beschreibt.

(b) Was sind die Brennpunkte und was ist die Fadenlänge?

Lösung:

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt $z \in M$ genau dann, wenn

$$64 > (|z-1|+|z+1|)^2 = |z-1|^2+|z+1|^2+2|(z-1)(z+1)| = |z-1|^2+|z+1|^2+2|z^2-1|.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\big(64 - |z-1|^2 - |z+1|^2\big)^2 > 4|z^2-1|^2.$$

Sei $x, y \in \mathbb{R}$, sodass $z = x + iy$. Die linke Seite der Ungleichung ist gleich

$$\begin{aligned}\big(64 - |z-1|^2 - |z+1|^2\big)^2 &= \big(64 - (x-1)^2 - (x+1)^2 - 2y^2\big)^2 = \big(62 - 2x^2 - 2y^2\big)^2 \\ &= 4x^4 + 4y^4 + 8x^2y^2 - 248x^2 - 248y^2 + 3844.\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist gleich

$$4|z^2-1|^2 = 4\big((x^2-y^2-1)^2 + 4x^2y^2\big) = 4x^4 + 4y^4 + 8x^2y^2 - 8x^2 + 8y^2 + 4$$

Darum ist $z \in M$ genau dann, wenn

$$-248x^2 - 248y^2 + 3844 > -8x^2 + 8y^2 + 4.$$

Dies ist äquivalent zu die Ungleichung für das Innere einer Ellipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} < 1.$$

(b) Ein komplexe Zahl $x + iy$ liegt genau dann auf den Rand von M, wenn $\|(x,y) - (1,0)\| + \|(x,y) - (-1,0)\| = 8$, wobei $\|\cdot\|$ die Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist. Die Ellipse mit Gleichung $\|(x,y) - (a,b)\| + \|(x,y) - (c,d)\| = l$ hat Brennpunkte (a,b) und (c,d) (und damit $z = a + ib$ und $z = c + id$ in $\mathbb{C}$) und Fadenlänge l. In diesem Fall sind die Brennpunkte $(1,0)$ $(-1,0)$ (und damit $z = \pm 1$ in $\mathbb{C}$) und Fadenlänge 8.