Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

# Analysis 1

## 10. Übungsblatt

**Präsenzaufgabe 10.1** Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetig und es gelte $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Präsenzaufgabe 10.2** Zeigen Sie: Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn sie strikt monoton ist.

**Präsenzaufgabe 10.3** Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass $f$ eine Fixpunkt hat, das heißt es existiert ein $x \in [0, 1]$, sodass $f(x) = x$.

**Präsenzaufgabe 10.4** Sei $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Seien $U, V \subseteq I$ offene Teilmengen, sodass

(i) $U \cup V = I$,

(ii) $U \cap V = \emptyset$.

Ziel ist es zu zeigen, dass $U = I$ und $V = \emptyset$, oder $U = \emptyset$ und $V = I$. Insbesondere ist es nicht möglich, dass $a \in U$ und $b \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass entweder $a \in U$ oder $a \in V$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, können wir annehmen, dass $a \in U$. Nehmen Sie an, dass $V \neq \emptyset$.

(b) Zeigen Sie, dass $x := \inf V$ existiert und $x > a$.

(c) Beweisen Sie, dass $x \notin U$.

(d) Beweisen Sie, dass $x \notin V$.

(e) Zeigen Sie, dass dies zu einem Widerspruch führt.

**Präsenzaufgabe 10.5** Sei $(X, d)$ eine metrischer Raum. Zeigen Sie, dass

$$d' := \frac{d}{d+1} : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1}$$

eine Metrik auf $X$ erklärt. Zeigen Sie, dass die offene Mengen in $(X, d)$ und $(X, d')$ gleich sind.

**Hausaufgabe 10.1** Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus sind definiert durch

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; &\qquad z \mapsto \sinh(z) := \frac{1}{2}\big(e^z - e^{-z}\big), \\ \cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; &\qquad z \mapsto \cosh(z) := \frac{1}{2}\big(e^z + e^{-z}\big). \end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie, dass sinh und cosh stetig sind.

(b) Ermittlen Sie Potenzreihendarstellungen für diese Funktionen.

(c) Zeigen Sie, dass sinh die Menge $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet.

(d) Beweisen Sie für $z \in \mathbb{C}$, dass

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1.$$

(e) Skizzieren Sie die Graphen der (reellen) Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sinh(x)$ und $x \mapsto \cosh(x)$.

**Hausaufgabe 10.2** Sei $(X, d)$ eine metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Der Abstand zu $A$ ist durch

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\} \qquad (x \in X)$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in X$

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Folgere, dass die Funktion $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$ stetig ist.

(b) Sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass $d(x, A) = 0$ genau dann, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ gibt.

**Hausaufgabe 10.3** Unter welchen Voraussetzungen ist eine Funktion

$$h : \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$$

stetig?

**Hausaufgabe 10.4** Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Ist $f$ stetig?

---

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 20.12.2019, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.