Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

10. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 10.1 Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetig und es gelte $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Lösung: Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Weil f und g stetig sind, gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

Weil dies wahr ist für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt $f = g$.

Präsenzaufgabe 10.4 Sei $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Seien $U, V \subseteq I$ offene Teilmengen, sodass

(i) $U \cup V = I$,

(ii) $U \cap V = \emptyset$.

Ziel ist es zu zeigen, dass $U = I$ und $V = \emptyset$, oder $U = \emptyset$ und $V = I$. Insbesondere ist es nicht möglich, dass $a \in U$ und $b \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass entweder $a \in U$ oder $a \in V$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, können wir annehmen, dass $a \in U$. Nehmen Sie an, dass $V \neq \emptyset$.

(b) Zeigen Sie, dass $x := \inf V$ existiert und $x > a$.

(c) Beweisen Sie, dass $x \notin U$.

(d) Beweisen Sie, dass $x \notin V$.

(e) Zeigen Sie, dass dies zu einem Widerspruch führt.

Lösung:

(a) $a \in I = U \cup V$ und darum $a \in U$ oder $a \in V$.

(b) V ist nicht leer und nach unten beschränkt durch a. Es folgt, dass $\inf(V)$ existiert. U ist offen und $a \in U$. Es gibt darum ein $\epsilon > 0$, sodass $[a, a+\epsilon) = \{y \in I : |y - a| < \epsilon\} \subseteq U$. Weil $U \cap V = \emptyset$, gilt $V \subseteq [a + \epsilon, b]$ und darum $x = \inf(V) \geq a + \epsilon > a$.

(c) Nehme an, dass $x \in U$. Weil U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $\{y \in I : |y - x| < \epsilon\} \subseteq U$. Es folgt dass $[a, x + \epsilon) \subseteq U$ und damit $V \subseteq [x + \epsilon, b]$. Darum $x = \inf(V) \geq x + \epsilon > x$. Dies ist ein Widerspruch.

(d) Nehme an, dass $x \in V$. Weil V offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $\{y \in I : |y - x| < \epsilon\} \subseteq V$. Weil $x > a$ gibt es $y \in V$ mit $y < x$. Darum gilt $x = \inf(V) \leq y < x$. Dies ist ein Widerspruch.

(e) $x \in I = U \cup V$, aber $x \notin U$ und $x \notin V$. Dies ist ein Widerspruch.

Hausaufgabe 10.1 Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus sind definiert durch

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \qquad & z \mapsto \sinh(z) := \frac{1}{2}\big(e^z - e^{-z}\big), \\ \cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \qquad & z \mapsto \cosh(z) := \frac{1}{2}\big(e^z + e^{-z}\big). \end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie, dass sinh und cosh stetig sind.

(b) Ermittlen Sie Potenzreihendarstellungen für diese Funktionen.

(c) Zeigen Sie, dass sinh die Menge $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet.

(d) Beweisen Sie für $z \in \mathbb{C}$, dass

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1.$$

(e) Skizzieren Sie die Graphen der (reellen) Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sinh(x)$ und $x \mapsto \cosh(x)$.

Lösung:

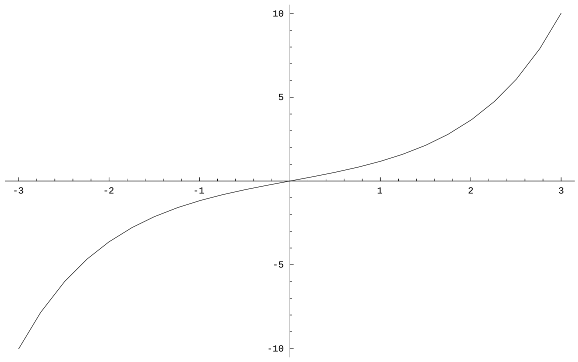
(a) Die Funktion $x \mapsto e^x$ ist stetig. Die Funktion $(x \mapsto e^{-x})$ ist die Komposition der stetige Funktionen $x \mapsto e^x$ und $x \mapsto -x$ und ist damit setig. Es folgt, dass cosh und sinh Summen stetiger Funktionen sind. Sie sind damit selbst auch stetig.

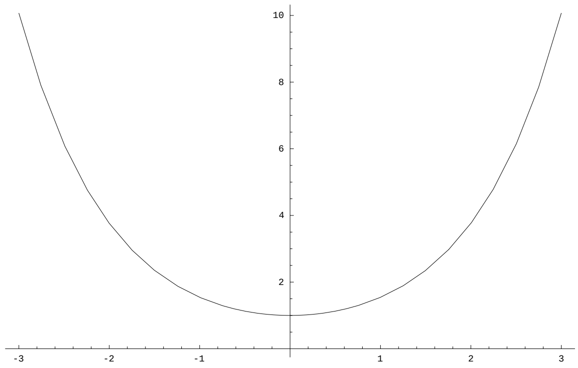
(b) Weil $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

(c) Sei $u = e^x$ und $y = \sinh(x)$. Es gilt $2y = u - \frac{1}{u}$ und damit $u^2 - 2uy - 1 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen $u = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$. Weil $u \geq 0$, gilt $u = y + \sqrt{y^2 + 1}$. Wenn $y = \sinh(x)$ folgt, dass $x = \log\big(y + \sqrt{y^2 + 1}\big)$. Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \log\big(y + \sqrt{y^2 + 1}\big)$ ist eine Umkehrfunktion von sinh. Dies beweist, dass sinh eine Bijektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist.

(d) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = \frac{1}{4}\big((e^{2z} + 2 + e^{-2z}) - (e^{2z} - 2 + e^{-2z})\big) = 1.$





(e) sinh cosh

Hausaufgabe 10.2 Sei (X, d) eine metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Der Abstand zu A ist durch

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\} \qquad (x \in X)$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in X$

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Folgere, dass die Funktion $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$ stetig ist.

(b) Sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass $d(x, A) = 0$ genau dann, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ gibt.

Lösung:

(a) Seien $x, y \in X$ und $z \in A$. Es gilt $d(x, A) = \inf_{u\in A} d(x, u) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ und darum $d(x, A) \leq \inf_{z\in A} \big(d(x, y) + d(y, z)\big) = d(x, y) + d(y, A)$. Es folgt $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Man kann die Rolle von x und y verwechseln und folgern, dass auch $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$. Es folgt, dass $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Sei $x \in X$, $\epsilon > 0$ und $\delta = \epsilon$. Für alle $y \in B(x, \delta)$ gilt $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) < \epsilon$.

(b) Wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A gibt mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, dann gibt es für jede $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodas $d(x, a_n) < \epsilon$. Weil $d(x, A) \leq d(x, a_n)$, folgt, dass $d(x, A) < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$, und damit $d(x, A) = 0$.

Wenn $\inf_{a\in A}(d, a) = d(x, A) = 0$, dann gibt es für jede $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.