Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

11. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 11.1 Bestimmen Sie jeweils die Grenzfunktion der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und überprüfen Sie, ob gleichmäßige Konvergenz vorliegt:

(a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{n}$,

(b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{n}$,

(c) $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Präsenzaufgabe 11.2 Für welche $n \in \mathbb{Z}$ ist die Funktion $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$ gleichmäßig stetig?

Präsenzaufgabe 11.3 Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn es ein $\beta \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Funktion f durch $f(b) := \beta$ zu einer auf ganz $[a,b]$ stetigen Funktion fortgesetzt wird. *Hinweis:* Zeigen Sie die Existenz von $\lim_{x\nearrow b} f(x)$.

Präsenzaufgabe 11.4 Sei $f : [0,\infty) \to [1,\infty)$, $x \mapsto \cosh(x)$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f. *Hinweis:* Setze $u = e^x$ und löse die Gleichung $u + \frac{1}{u} = 2y$ nach y auf.

Präsenzaufgabe 11.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie: Wenn f Lipschitz-stetig ist, dann ist f gleichmäßig stetig. Die Umkehrung ist falsch: Zeigen Sie, dass $\sqrt{\cdot} : [0,1] \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

Hausaufgabe 11.1 Untersuchen Sie die Reihen

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^n - x^{n+1})$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz im Intervall $I = [0, 1]$.

Hausaufgabe 11.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass $|f(x)| \leq L(1 + |x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hausaufgabe 11.3 Sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist, und bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f.

Hausaufgabe 11.4 Beweisen Sie den *Fundamentalsatz der Algebra*: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst für $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$:

(a) $|P|$ nimmt auf $\mathbb{C}$ ein Minimum an.

(b) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ und setze $Q(z) = \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$. Dann ist $Q(z)$ ein Polynom vom Grad n. Es gibt $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + 1$$

und $b_n \neq 0$.

(c) Sei $m := \min\{k \in \mathbb{N} : b_k \neq 0\}$. Bemerke das $1 \leq m \leq n$. Es gibt ein Polynom $R(z)$, sodass

$$Q(z) = 1 + b_m z^m + z^{m+1} R(z).$$

(d) Es gibt ein $\phi \in \mathbb{C}$, sodass $\phi^m = \frac{-1}{b_m}$. Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$Q(r\phi) = 1 - r^m + r^{m+1}\phi^{m+1} R(r\phi).$$

(e) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r \mapsto |Q(r\phi)|$ hat kein Minimum in $r = 0$. *Hinweis:* Betrachte erst der Fall $R(z) = 0$.

(f) $|Q|$ hat kein Minimum an der Stelle $z = 0$.

(g) $|P|$ hat an einer Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ kein Minimum.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 10.1.2020, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.