Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

11. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 11.3 Sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn es ein $\beta \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Funktion f durch $f(b) := \beta$ zu einer auf ganz $[a, b]$ stetigen Funktion fortgesetzt wird.
Lösung: Nehme an, dass f durch $f(b) := \beta$ zu einer auf ganz $[a, b]$ stetigen Funktion fortgesetzt wird. Weil $[a, b]$ kompakt ist, ist f nach der Satz von Heine gleichmäßig stetig.
Nehme jetzt an, dass f gleichmäßig stetig ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wächsende Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist sie Cauchy. Wir behaupten, dass $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ auch Cauchy ist. Sei $\epsilon > 0$. Weil f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$. Sei $N \in \mathbb{N}$ sodass $|x_n - x_m| < \delta$ für alle $n, m > N$. Dann gilt $|f(x_n) - f(x_m| < \epsilon$ für alle $n, m > N$. Hiermit ist die Behauptung bewiesen.
Jede Cauchy-Folge ist konvergent. Sei β die Grenzwert von $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Jetzt betrachten wir die Fortsetzung von f auf ganz $[a, b]$ gegeben durch $f(b) := \beta$. Es ist zu zeigen, dass die Fortsetzung von f stetig ist. Sei $\epsilon > 0$. Sei jetzt $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x, y \in [a, b)$ mit $|x - y| < \delta$. Sei $n \in \mathbb{N}$, so dass $b - x_n < \delta$ und $|f(x_n) - \beta| < \frac{\epsilon}{2}$. Sei $x \in [a, b)$ mit $b - x < \delta$. Dann gilt $|x - x_n| < \delta$ und damit $|f(x) - f(x_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Darum

$$|f(x) - \beta| = |f(x) - f(x_n) + f(x_n) - \beta| \le |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - \beta| < \epsilon.$$

Präsenzaufgabe 11.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie: Wenn f Lipschitz-stetig ist, dann ist f gleichmäßig stetig. Die Umkehrung ist falsch: Zeigen Sie, dass $\sqrt{\cdot} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.
Lösung: Nehme an, dass f Lipschitz-stetig ist. Es gibt ein $L > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ für alle $x, y \in D$. Sei $\epsilon > 0$ und $0 < \delta < \frac{\epsilon}{L}$. Jetzt gilt $|f(x) - f(y)| < L\delta < \epsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$. Dies beweist, dass f gleichmäßig stetig ist.
Die Funktion $\sqrt{\cdot} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig und $[0, 1]$ ist kompakt. Nach der Satz von Heine ist die Funktion auch gleichmäßig stetig. Weil

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty,$$

gibt es aber kein $L > 0$ mit die Eigenschaft $\sqrt{x} \le Lx$. Die Funktion ist darum nicht Lipschitz-stetig.

Hausaufgabe 11.1 Untersuchen Sie die Reihen

$$(a) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) \qquad (b) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^n - x^{n+1})$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz im Intervall $I = [0, 1]$.
Lösung:

(a) Es gilt $\sum_{n=0}^{k}(x^n - x^{n+1}) = 1 - x^{k+1}$. Die rechten Seite konvergiert für $k \to \infty$ gegen 1 wenn $x \in [0,1)$ und gegen 0 wenn $x = 0$. Die Grenzfunktion

$$[0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

ist nicht stetig. Wenn die konvergenz gleichmäßig wäre, dann würde die Grenzfunktion stetig sein.

(b) Weil $\sum_{n=0}^{k}(-x)^k = \frac{1-(-x)^{k+1}}{1+x}$, gilt

$$f_k(x) := \sum_{n=0}^{k}(-1)^n(x^n - x^{n+1}) = \frac{1-(-x)^{k+1}}{1+x} - x\frac{1-(-x)^{k+1}}{1+x} = (1-x)\frac{1-(-x)^{k+1}}{1+x}.$$

Es folgt, dass $f_k(x)$ gegen $\frac{1-x}{1+x}$ konvergiert wenn $0 \leq x < 1$ und gegen 0 wenn $x = 1$. Die Grenzfunktion ist damit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$. Es gilt

$$|f_k(x) - f(x)| = \left|(-x)^{k+1}\frac{1-x}{1+x}\right| = x^{k+1}\frac{1-x}{1+x} \leq x^{k+1}(1-x).$$

Sei $\epsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass $(1-\epsilon)^N < \epsilon$. Wenn $k > N$ und $0 \leq x \leq 1-\epsilon$, dann

$$|f_k(x) - f(x)| \leq x^{k+1}(1-x) \leq x^{k+1} \leq (1-\epsilon)^{k+1} \leq (1-\epsilon)^N < \epsilon.$$

Für $1 - \epsilon < x \leq 1$ gilt

$$|f_k(x) - f(x)| \leq x^{k+1}(1-x) \leq (1-x) < \epsilon.$$

Dies beweist, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Hausaufgabe 11.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass $|f(x)| \leq L(1 + |x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Lösung: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \leq \delta$. Insbesondere gilt für alle $x \in [0, \delta]$, dass $|f(x) - f(0)| \leq 1$ und damit $|f(x)| \leq |f(0)| + 1$. Nehme an, dass $|f(x)| \leq f(0) + k$ für alle $x \in [(k-1)\delta, k\delta]$. Dann gilt $|f(x) - f(k\delta)| \leq 1$ für alle $x \in [k\delta, (k+1)\delta]$ und damit

$$|f(x)| \leq |f(k\delta)| + 1 \leq |f(0)| + k + 1.$$

Mit dem Prinzip der vollständige Induktion folgt, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f(x)| \leq |f(0)| + k \qquad (x \in [(k-1)\delta, k\delta]).$$

Bemerke, dass $|f(0)| + k \leq |f(0)| + 1 + \frac{1}{\delta}x$ für $x \geq (k-1)\delta$. Darum gilt

$$|f(x)| \leq |f(0)| + 1 + \frac{1}{\delta}x \qquad (x \geq 0).$$

Auf ähnliche Weise folgt

$$|f(x)| \leq |f(0)| + 1 + \frac{1}{\delta}|x| \qquad (x \leq 0).$$

Dei Behauptung folgt jetzt mit $L = \max\{|f(0)| + 1, \frac{1}{\delta}\}$.

Hausaufgabe 11.4 Beweisen Sie den *Fundamentalsatz der Algebra*: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.
Lösung: Sei $P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Die Funktion $|P|$ ist stetig. Es gilt

$$|P(z)| \geq |a_n|\,|z|^n - |a_{n-1}|\,|z|^{n-1} - \cdots - |a_1|\,|z| - |a_0|$$

Weil

$$\lim_{r\to\infty} |a_n|\,r^n - |a_{n-1}|\,r^{n-1} - \cdots - |a_1|\,r - |a_0| = \infty,$$

gibt es ein $R > 0$, so dass $P(|z|) > |a_0| = |P(0)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$. Darum

$$\inf\{|P(z)| : z \in \mathbb{C}\} = \inf\{|P(z)| : z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}.$$

$|P|$ ist stetig und $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ ist kompakt. Es folgt, dass $|P|$ sein Minimum auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ annimmt. Wir behaupten dass $\min\{|P(z)| : z \in \mathbb{C}\} = 0$. Aus der Behauptung folgt, dass P eine Nullstelle besitzt.
Die Behauptung ist bewiesen wenn wir zeigen, dass $|P|$ an einer Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ kein Minimum hat. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ und setze $Q(z) = \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$. Jede Verschiebung und Skalierung von einem Polynom vom Grad n ist ein Polynom vom Grad n. $Q(z)$ ist also ein Polynom vom Grad n. Es gibt $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ mit

$$Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0.$$

Weil $Q(z)$ vom Grad n ist, gilt $b_n \neq 0$. Weiter gilt $b_0 = Q(0) = \frac{P(z_0)}{P(z_0)} = 1$.
Sei $m := \min\{k \in \mathbb{N} : b_k \neq 0\}$. Weil $b_n \neq 0$, gilt $1 \leq m \leq n$. Definiere

$$R(z) := b_n z^{n-m-1} + \cdots + b_{m+1}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} Q(z) &= b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_m z^m + 1 = 1 + b_m z^m + z^{m+1}\big(b_n z^{n-m-1} + \cdots + b_{m+1}\big) \\ &= 1 + b_m z^m + z^{m+1} R(z). \end{aligned}$$

Betrachte jetzt $c := \frac{-1}{b_m} \in \mathbb{C}$. Weil $\left|\frac{c}{|c|}\right| = 1$, gibt es ein $\theta \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{c}{|c|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$. Sei $\phi := \sqrt[m]{|c|}e^{i\frac{\theta}{m}}$. Es gilt

$$\phi^m = \big(\sqrt[m]{|c|}\big)^m \big(e^{i\frac{\theta}{m}}\big)^m = |c|e^{i\theta} = |c|\frac{c}{|c|} = c.$$

Es folgt

$$Q(r\phi) = 1 + b_m r^m \phi^m + r^{m+1}\phi^{m+1} R(r\phi) = 1 - r^m + r^{m+1}\phi^{m+1} R(r\phi).$$

Definiere $C := \max\{|\phi^{m+1}R(r\phi)| : -1 \leq r \leq 1\}$. Sei $0 < \epsilon < 1$, so dass $\epsilon C < 1$. Es gilt

$$|Q(\epsilon\phi)| = |1 - \epsilon^m + \epsilon^{m+1}\phi^{m+1}R(\epsilon\phi)| \leq |1 - \epsilon^m| + \epsilon^m \epsilon |\phi^{m+1}R(\epsilon\phi)| < 1 - \epsilon^m + \epsilon^m = 1$$

Es folgt dass die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r \mapsto |Q(r\phi)|$ kein Minimum in $r = 0$ hat und damit, dass $|Q|$ kein Minimum an der Stelle $z = 0$ hat. Weil $|Q| = \frac{1}{|P(z_0)|}|P(\cdot + z_0)|$, schließen wir, dass $|P|$ sein Minimum nicht an einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ annimmt. Damit ist die Behauptung bewiesen.