Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

12. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 12.2 Sei $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

(a) Beweisen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^n$ gleich R ist.

(b) Beweisen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ auch der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)a_n x^n$ gleich R ist.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$. Beweisen Sie, dass F differenzierbar in x ist und $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$.

(d) Beweisen Sie, dass F sogar unendlich oft differenzierbar in x ist und für jede $k \in \mathbb{N}$ $F^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)a_{n+k}x^n$.

Lösung:

(a) Sei $r > 0$ und sei $\big(f_m\big)_{m\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $f_m := \sum_{n=0}^{m} |a_n| r^n$. Die Folge $\big(f_m\big)_{m\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn $\big(\frac{f_m - f_k}{r^k}\big)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Weil $\frac{f_m - f_k}{r^k} = \sum_{n=0}^{m} |a_{n+k}| r^n$ folgt, dass $(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^n)_{m\in\mathbb{N}}$ genau dann absolut konvergent ist, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergent ist. Die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^n$ haben darum den gleichen Konvergenzradius.

(b) Weil $(n+k)(n+k-1)\dots(n+1) \geq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, ist die Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)a_n x^n$ kleiner oder gleich R.

Sei $0 < r < R$. Sei $s \in \mathbb{R}$ mit $r < s < R$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)r^n \leq s^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Darum gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)|a_n|r^n \leq \sum_{n=0}^{N}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)|a_n|r^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| s^n$$

Weil die Reihe $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| s^n$ konvergent ist, folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)|a_n|r^n$ konvergent ist. Dies gilt für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$ und darum ist die Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)a_n x^n$ größer oder gleich R.

(c) Nehme $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$ fest. Es reicht zu zeigen, dass

$$\phi(x,h) := \left| \frac{\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n\Big) - \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right|$$

gegen 0 konvergiert wenn $h \to 0$. Nach dem binomischen Lehrsatz und der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned}\phi(x,h) &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\Big)\right| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1}\right| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|x|^{n-k}|h|^{k-1} = |h|\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k+2}|x|^{n-2-k}|h|^k.\end{aligned}$$

Weil

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k+2}|x|^{n-2-k}|h|^k &= \sum_{k=0}^{n-2}\frac{n(n-1)}{(k+2)(k+1)}\binom{n-2}{k}|x|^{n-2-k}|h|^k \\ &\leq n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}|x|^{n-2-k}|h|^k = n(n-1)\big(|x|+|h|\big)^{n-2}\end{aligned}$$

folgt

$$\phi(x,h) \leq |h|\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|\big(|x|+|h|\big)^{n-2} = |h|\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)|a_{n+2}|\big(|x|+|h|\big)^n.$$

Es folgt aus (a) und (b), dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n$ Konvergenzradius gleich R hat. Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r < R$ und sei

$$C = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)|a_{n+2}|r^n < \infty.$$

Wenn $|h| \leq r - |x|$, dann gilt

$$\phi(x,h) \leq |h|\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)|a_{n+2}|r^n = |h|C.$$

Dies beweist, dass $\lim_{h\to 0}\phi(x,h) = 0$.

(d) Die Behauptung folgt mit vollständige Induktion einfach aus (c).

Präsenzaufgabe 12.3 Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist.
Lösung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt ein Polynom $p_n(x)$ derart, dass

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \qquad (x > 0).$$

Diese Behauptung beweisen wir mit vollständige Induktion. Für $n = 0$ gilt $f^{(0)} = p_0 f$ mit $p_0 = 1$. Nehme an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ es ein Polynom $p_n(x)$ gibt, so dass $f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ wenn $x > 0$. Sei $p_{n+1}(x) := -x^2 p_n'(x) + x^2 p_n(x)$. Für $x > 0$ gilt

$$f^{(n+1)}(x) = p_n'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} + p_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.
Aus der Behauptung folgt, dass f beliebig oft differenzierbar ist im jedem Punkt $x \neq 0$. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenz, gilt $\lim_{x \downarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$ und $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} f^{(n)}(x) = 0$. Es folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} f(x) = 0.$$

Damit ist f differenzierbar in 0 und $f'(0) = 0$. Nehme jetzt an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f n-mal differenzierbar in 0 ist und $f^{(n)}(0) = 0$. Es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} f^{(n)}(x) = 0.$$

Es folgt mit vollständige Induktion, dass f beliebig oft differenzierbar in 0 ist und alle Ableitungen von f in 0 gleich 0 sind.

Hausaufgabe 12.1 Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $[a, b]$. Beweisen Sie den Satz von Darboux: f' nimmt auf $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.
Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $f'(a) > f'(b)$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f'(a) > \lambda > f'(b)$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \lambda x$. Weil f differenzierbar ist, ist g auch differenzierbar und damit stetig. Das Interval $[a, b]$ ist kompakt und damit nimmt g sein Maximum auf $[a, b]$ in einem Punkt $y \in [a, b]$ an. Weil $g'(a) = f'(a) - \lambda > 0$ gilt

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} > 0.$$

Es folgt, dass es $x \in [a, b]$ gibt mit $g(x) > g(a)$ und darum $y \neq a$. Auf ähnliche Weise folgt $y \neq b$. Es folgt, dass $y \in (a, b)$. Nach Satz 7.4 im Skript vom Müller gilt $g'(y) = 0$ und damit $f'(y) = \lambda$.

Hausaufgabe 12.3 Zeigen Sie für hinreichend oft differenzierbare Funktionen f, g die Leibniz-Formel:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}. \tag{1}$$

Lösung: Wir beweisen die Formel mit vollständige Induktion. Für $n = 0$ ist die Formel trivial. Nehme an, dass (1) für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. Dann gilt für alle x

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d}{dx} \left(f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \right) \\
&= f(x) g^{(n+1)}(x) + f^{(n+1)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x).
\end{aligned}
$$

Weil $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ folgt

$$
(f \cdot g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
$$