Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

13. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 13.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = e^x + x^{117} + x^7 + x^{23} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist. *Hinweis:* Untersuchen Sie f auf Monotonie und bestimmen Sie das Grenzverhalten $x \to \pm\infty$.

(b) Berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.

Präsenzaufgabe 13.2 Bestimmen Sie die Extremstellen und Extremwerte der Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^{-x}$.

Präsenzaufgabe 13.3 Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 \sin(x^2 - 2x - 3)}{x^2 - 5x + 6}.$$

Präsenzaufgabe 13.4 Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre jeweiligen Antworten.

(a) Sind $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $\alpha, \beta \geq 0$, so ist auch $\alpha f_1 + \beta f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex.

(b) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge konvexer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist die Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ebenfalls konvex.

(c) Jede konvexe Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig. *Hinweis:* Teilaufgabe (b).

Hausaufgabe 13.1 Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei H_n gegeben durch

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Beweisen Sie, dass $H_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist. Diese Polynome werden die Hermiteschen Polynome (nach Charles Hermite) genannt.

(b) Berechnen Sie H_0, H_1, H_2, H_3 und H_4.

(c) Beweisen Sie, dass die Hermiteschen Polynome eindeutig bestimmt werden durch $H_0(x) = 1$ und die Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - \frac{d}{dx}H_n(x) \qquad (n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}).$$

(d) Beweisen Sie, dass die Hermiteschen Polynome auch eindeutig bestimmt werden durch $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$ und die Rekursionsformel

$$H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x) \qquad (n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}).$$

Hinweis: Zeigen Sie, mit Hilfe der Leibniz-Formel, dass

$$\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}e^{-x^2} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\big(-2xe^{-x^2}\big) = -2x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2} - 2(n+1)\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

(e) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das Hermitesche Polynom H_n die Differenzialgleichung

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

erfüllt.

Hausaufgabe 13.2 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ konvex. Beweisen Sie die diskretisierte Jensen'sche Ungleichung: Für alle $x_1, \dots, x_n \in D$ und $\lambda_i \geq 0$ reell mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Hausaufgabe 13.3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie,

(a) Wenn f gerade ist, dann ist f' ungerade.

(b) Wenn f ungerade ist, dann ist f gerade.

Hausaufgabe 13.4 Zeigen Sie: Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ist stetig in $x = 0$ aber nicht differenzierbar.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 24.1.2020, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.