Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

14. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 14.1 Sei I ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist konkav, wenn $-f : I \to \mathbb{R}$ konvex ist.

(a) Beweisen Sie, dass $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ konkav ist.

(b) Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie: für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt die Ungleichung

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\log\left(x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}}\right)$ *und* $\log\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right)$.

Für $p \in [1, \infty)$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ definieren wir $\|x\|_p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(c) Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie die Höldersche Ungleichung: Für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\xi_k = \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} \in \mathbb{C}$ *und* $\eta_k = \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q} \in \mathbb{C}$ *und verwenden Sie die Ungleichung in (b) auf* ξ_k *und* η_k.

(d) Sei $p \in [1, \infty)$. Beweisen Sie die Minkowskische Ungleichung: Für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Hinweis: Sei $q \in [1, \infty)$*, so dass* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *und sei* $u \in \mathbb{C}^n$ *gegeben durch* $u_k = |x_k + y_k|^{p-1}$*. Beweisen Sie mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung, dass*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| u_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| u_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k| u_k\right) \leq \big(\|x\|_p + \|y\|_p\big) \|u\|_q$$

und

$$\|u\|_q = \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

(e) Beweisen Sie, dass für jedes $p \in [1, \infty)$ die Abbilding $\| \cdot \|_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ definiert.

Präsenzaufgabe 14.2 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Stammfunction von $f : x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$ (überall wo f definiert ist) im Fall

(a) $b^2 - 4ac < 0$, (*Hinweis: Bestimmen Sie erst die Stammfunktion von* $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$.)

(b) $b^2 - 4ac = 0$,

(c) $b^2 - 4ac > 0$.

Hausaufgabe 14.1 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) := x + e^x$, besitzt eine beliebig oft differenzierbare Umkehrfunktion $g = f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (braucht nicht gezeigt zu werden). Berechnen Sie $g''(1)$.

Hausaufgabe 14.2 (*Partialbruchzerlegung*)

(a) Seien $p(z)$ und $q(z)$ Polynome. Beweisen Sie, dass es eindeutig bestimmte Polynome h und r gibt mit

  (i) $p = qh + r$

  (ii) $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(q)$.

(b) Beweisen Sie, dass jede rationale Funktion $\frac{p}{q}$ geschrieben werden kann als $\frac{p}{q} = h + \frac{r}{q}$ wobei h und r Polyome sind und $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(q)$.

(c) Was sind h und r wenn $p(z) = z^5 + z^3 + 3z + 2$ und $q(z) = 5z^3 + z^2 + 2z + 1$?

(d) Es sei $R = \frac{p}{q}$ eine rationale Funktion mit $\mathrm{Grad}(p) < s := \mathrm{Grad}(q)$ so, dass p und q keine gemeinsame Nullstelle besitzen. Seien $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$ und $c, a_1, \dots, a_s \in \mathbb{C}$, mit $a_i \neq a_j$, für $i \neq j$, so dass

$$q(z) = c(z - a_1)^{n_1} \dots (z - a_s)^{n_s}$$

Beweisen Sie, dass R die folgende eindeutige Patialbruchzerlegung mit $A_{1,1}, \dots, A_{s,n} \in \mathbb{C}$ besitzt:

$$\begin{aligned}\frac{p(z)}{q(z)} = {} & \frac{A_{1,1}}{z-a_1} + \frac{A_{1,2}}{(z-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,n_1}}{(z-a_1)^{n_1}} \\ & + \frac{A_{2,1}}{z-a_2} + \frac{A_{2,2}}{(z-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2,n_2}}{(z-a_2)^{n_2}} \\ & + \dots + \\ & + \frac{A_{s,1}}{z-a_s} + \frac{A_{s,2}}{(z-a_s)^2} + \dots + \frac{A_{s,n_s}}{(z-a_s)^{n_s}}.\end{aligned}$$

Hinweis: Sehen Sie Seite 175 im Skript von Müller. Verstehen und erklären Sie den Beweis, der dort gegeben ist.

(e) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegungen von

$$\frac{2x^3 + x - 1}{(x+2)(x-3)(x^2+1)} \qquad \text{und} \qquad \frac{x^2+3}{(x+2)^3(x-1)}.$$

(f) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $\mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^7 - 1}{(x+2)^5}$.

Hausaufgabe 14.3 Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{5 + e^x}\, dx,$

(b) $\displaystyle\int \sin(x) e^{\cos(x)}\, dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx.$

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 31.1.2020, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.