Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

14. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 14.2 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Stammfunction von $f : x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ (überall wo f definiert ist) im Fall

(a) $b^2 - 4ac < 0$,

(b) $b^2 - 4ac = 0$,

(c) $b^2 - 4ac > 0$.

Lösung: Wenn $a = b = 0$ und $c \neq 0$, dann ist $x \mapsto \frac{x}{c} + C$ eine Stammfunktion, wobei $C \in \mathbb{R}$. Wenn $a = 0$ und $b \neq 0$, dann sind alle Stammfunktionen der Form $x \mapsto \frac{1}{b} \log(|x + \frac{c}{b}|) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.
Jetzt betrachten wir erst der Spezialfall wobei $a = 1$ und $b = 0$ und $c = 1, 0, -1$. Die Stammfunktionen sind dann der Form

$$x \mapsto \begin{cases} \arctan(x) + C & (c = 1), \\ \dfrac{-1}{x} + C & (c = 0), \\ \dfrac{\log(|x-1|)}{2} - \dfrac{\log(|x+1|)}{2} + C = \dfrac{1}{2} \log\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right) + C & (c = -1), \end{cases}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. Wenn F eine Stammfunktion einer Funktion ϕ ist, dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} F\big(\lambda x\big) = \lambda \phi(\lambda x),$$
$$\frac{d}{dx} \lambda F(x) = \lambda \phi(x),$$
$$\frac{d}{dx} F(x + \lambda) = \phi(x + \lambda).$$

Wir setzen $D = b^2 - 4ac$. Wir nehmen erst an, dass $D \neq 0$. Es gilt

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{4a}{|D|} \frac{1}{\left(\frac{2a}{\sqrt{|D|}} x + \frac{b}{\sqrt{|D|}}\right)^2 - \operatorname{sign}(D)}.$$

Mit die oben genannte Rechenregel folgt, dass die Stammfunktionen der Form

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{|D|}} \arctan\left(\dfrac{2ax}{\sqrt{|D|}} x + \dfrac{b}{\sqrt{|D|}}\right) + C, & (D < 0), \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{D}} \log\left(\left|\dfrac{2ax + b - \sqrt{D}}{2ax + b + \sqrt{D}}\right|\right) + C & (D > 0) \end{cases}$$

sind. Wenn $D=0$, dann
$$\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}.$$
Die Stammfunktionen sind dann der Form
$$x\mapsto \frac{1}{a}\frac{-1}{x+\frac{b}{2a}}=\frac{-1}{ax+\frac{b}{2}}.$$

Hausaufgabe 14.1 Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x):=x+e^x$, besitzt eine beliebig oft differenzierbare Umkehrfunktion $g=f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (braucht nicht gezeigt zu werden). Berechnen Sie $g''(1)$.
Lösung: Es gilt
$$\frac{d^2}{dx^2}(f\circ g)(x)=\frac{d^2}{dx^2}x=0$$
und
$$\frac{d^2}{dx^2}(f\circ g)(x)=\frac{d}{dx}\Big(f'\big(g(x)\big)g'(x)\Big)=f''\big(g(x)\big)\big(g'(x)\big)^2+f'\big(g(x)\big)g''(x)$$
Weil $g(1)=0$ und
$$g'(1)=\frac{1}{f'\big(g(1)\big)}=\frac{1}{f'(0)},$$
folgt, dass
$$\frac{f''(0)}{\big(f'(0)\big)^2}+f'(0)g''(1)=0$$
Es gilt $f'(0)=2$ und $f''(0)=1$ und darum $g''(1)=-\frac{f''(0)}{\left(f'(0)\right)^3}=-\frac{1}{8}$.

Hausaufgabe 14.2 (*Partialbruchzerlegung*)

(a) Seien $p(z)$ und $q(z)$ Polynome. Beweisen Sie, dass es eindeutig bestimmte Polynome h und r gibt mit $p=qh+r$ und $\mathrm{Grad}(r)<\mathrm{Grad}(q)$.

(b) Beweisen Sie, dass jede rationale Funktion $\frac{p}{q}$ geschrieben werden kann als $\frac{p}{q}=h+\frac{r}{q}$ wobei h und r Polyome sind und $\mathrm{Grad}(r)<\mathrm{Grad}(q)$.

(c) Was sind h und r wenn $p(z)=z^5+z^3+3z+2$ und $q(z)=5z^3+z^2+2z+1$?

(d) Es sei $R=\frac{p}{q}$ eine rationale Funktion mit $\mathrm{Grad}(p)<s:=\mathrm{Grad}(q)$ so, dass p und q keine gemeinsame Nullstelle besitzen. Seien $n_1,\dots,n_s\in\mathbb{N}$ und $c,a_1,\dots,a_s\in\mathbb{C}$, mit $a_i\neq a_j$, für $i\neq j$, so dass $q(z)=c(z-a_1)^{n_1}\dots(z-a_s)^{n_s}$. Beweisen Sie, dass R die eine eindeutige Patialbruchzerlegung besitzt.

(e) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegungen von $\frac{2x^3+x-1}{(x+2)(x-3)(x^2+1)}$ und $\frac{x^2+3}{(x+2)^3(x-1)}$.

(f) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{x^7-1}{(x+2)^5}$.

Lösung:

(a) Sei $q(z)$ ein Polynom. Für ein Polynom $s(z)$ definieren wir Polynome $H_s(z)$ und $R_s(z)$ wie folgt. Seien $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{C}$ mit $a_n, b_m \neq 0$, so dass $s(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ und $q(z) = \sum_{k=0}^m b_m z^k$. Wenn $n < m$ dann setze $H_s(z) := 0$ und $R_s(z) := s(z)$. Wenn $n \geq m$, dann setze $H_s(z) := \frac{a_n}{b_m} z^{n-m}$ und $R_s(z)(z) := p(z) - H_s(z)q(z)$. In diesem Fall gilt $\mathrm{Grad}(R_s) < n$.

Sei jetzt $p(z)$ ein Polynom und $n := \mathrm{Grad}(p)$. Jetzt definieren wir rekursiv $h_0(z) := 0$ und $r_0(z) := p(z)$ und für $k \in \mathbb{N}$

$$h_k(z) := H_{r_{k-1}}(z) \quad \text{und} \quad r_k(z) := R_{r_{k-1}}(z).$$

Es gilt $\mathrm{Grad}(r_{n+1}) < \mathrm{Grad}(q)$, $h_{n+1}(z) = 0$ und

$$p(z) = \big(h_1(z) + \cdots + h_n(z)\big)q(z) + r_n(z)$$

Die Behauptung gilt jetzt mit $h(z) := h_1(z) + \cdots + h_n(z)$ und $r(z) := r_n(z)$.

(b) Seien $h(z)$ und $r(z)$, so dass $p(z) = h(z)q(z) + r(z)$ und $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(q)$. Dann $\frac{p}{q} = h + \frac{r}{q}$.

(c) $z^5 + z^3 + 3z + 2 = (\frac{1}{5}z^2 - \frac{1}{25}z + \frac{16}{125})(5z^3 + z^2 + 2z + 1) + (\frac{-31}{125}z^2 + \frac{348}{125}z + \frac{234}{125})$.

(d) Sehen Sie Seite 175 im Skript von Müller.

(e)

$$\frac{2x^3 + x - 1}{(x+2)(x-3)(x^2+1)} = \frac{19}{25(x+2)} + \frac{28}{25(x-3)} + \frac{3-4i}{50(x-i)} + \frac{3+4i}{50(x+i)},$$

$$\frac{x^2+3}{(x+2)^3(x-1)} = \frac{-4}{27(x+2)} + \frac{5}{9(x+2)^2} - \frac{7}{3(x+2)^3} + \frac{4}{27(x-1)}.$$

(f) Es gilt

$$\frac{x^7 - 1}{(x+2)^5} = (x+2)^2 - 14(x+2) + 84 - \frac{280}{x+2} + \frac{560}{(x+2)^2} - \frac{672}{(x+2)^3} + \frac{448}{(x+2)^4} - \frac{129}{(x+2)^5}$$

und darum

$$\int \frac{x^7-1}{(x+2)^5}\,dx = \frac{1}{3}(x+2)^3 - 7(x+2)^2 + 84x - 280\log(|x+2|) - \frac{560}{x+2} + \frac{336}{(x+2)^2} - \frac{448}{3(x+2)^3} + \frac{129}{4(x+2)^4}.$$

Hausaufgabe 14.3 Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{5+e^x}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \sin(x)e^{\cos(x)}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx.$

Lösung:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{5 + e^x}\, dx = \log(5 + e^x) + C,$

(b) $\displaystyle\int \sin(x) e^{\cos(x)}\, dx = -e^{\cos(x)} + C,$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}\, dx = \int \frac{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx = 2\log\Big(\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\Big) + C.$