

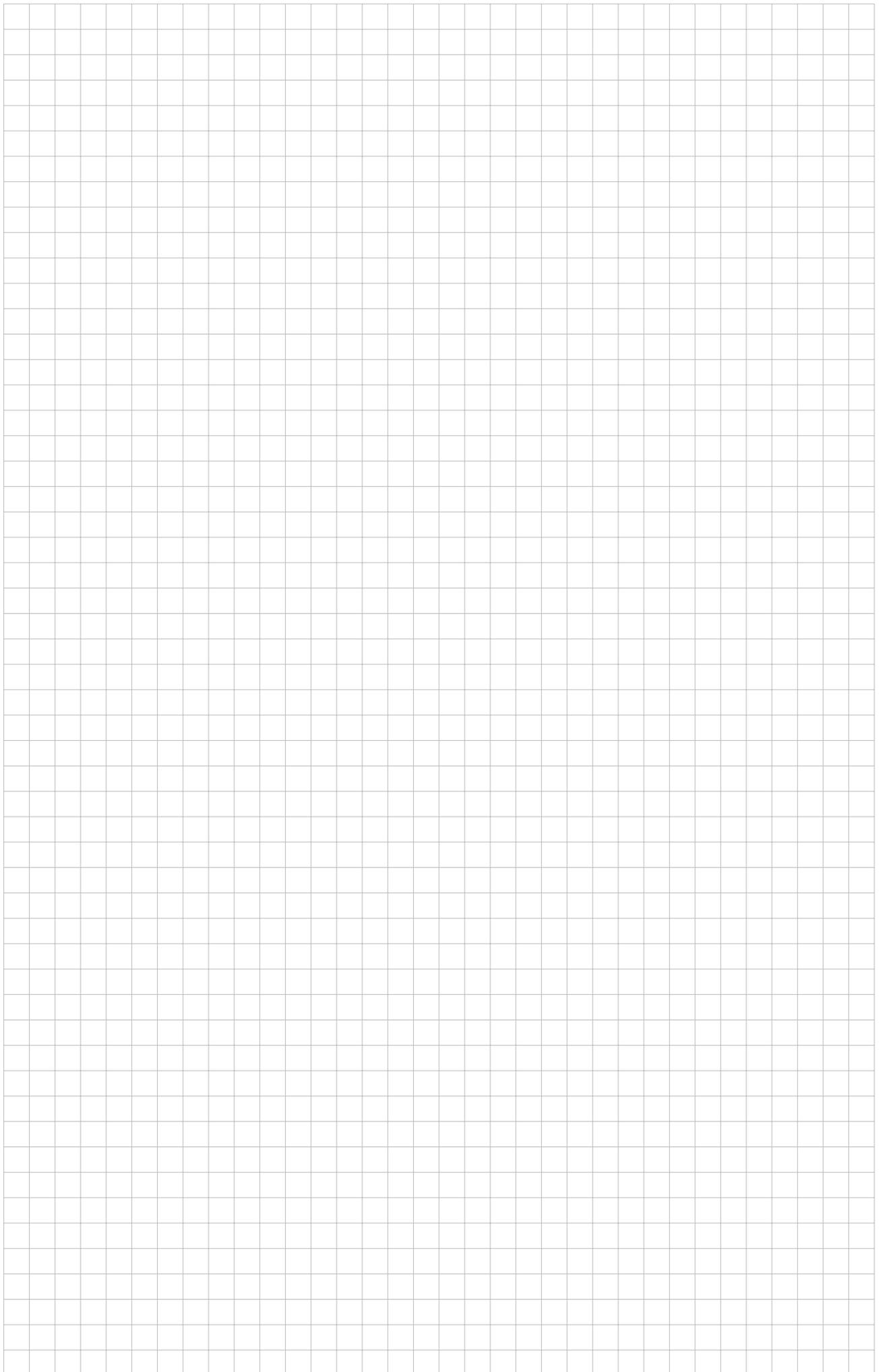
Analysis 1

Name:
Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Alle Hilfsmittel in Papierform sind erlaubt; *elektronische Hilfsmittel sind verboten*.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben (je 10 Punkte). Man hat bestanden, wenn man mindestens 30 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

1	2	3	4	5	6	Summe



Aufgabe 1: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag folgender komplexer Zahlen:

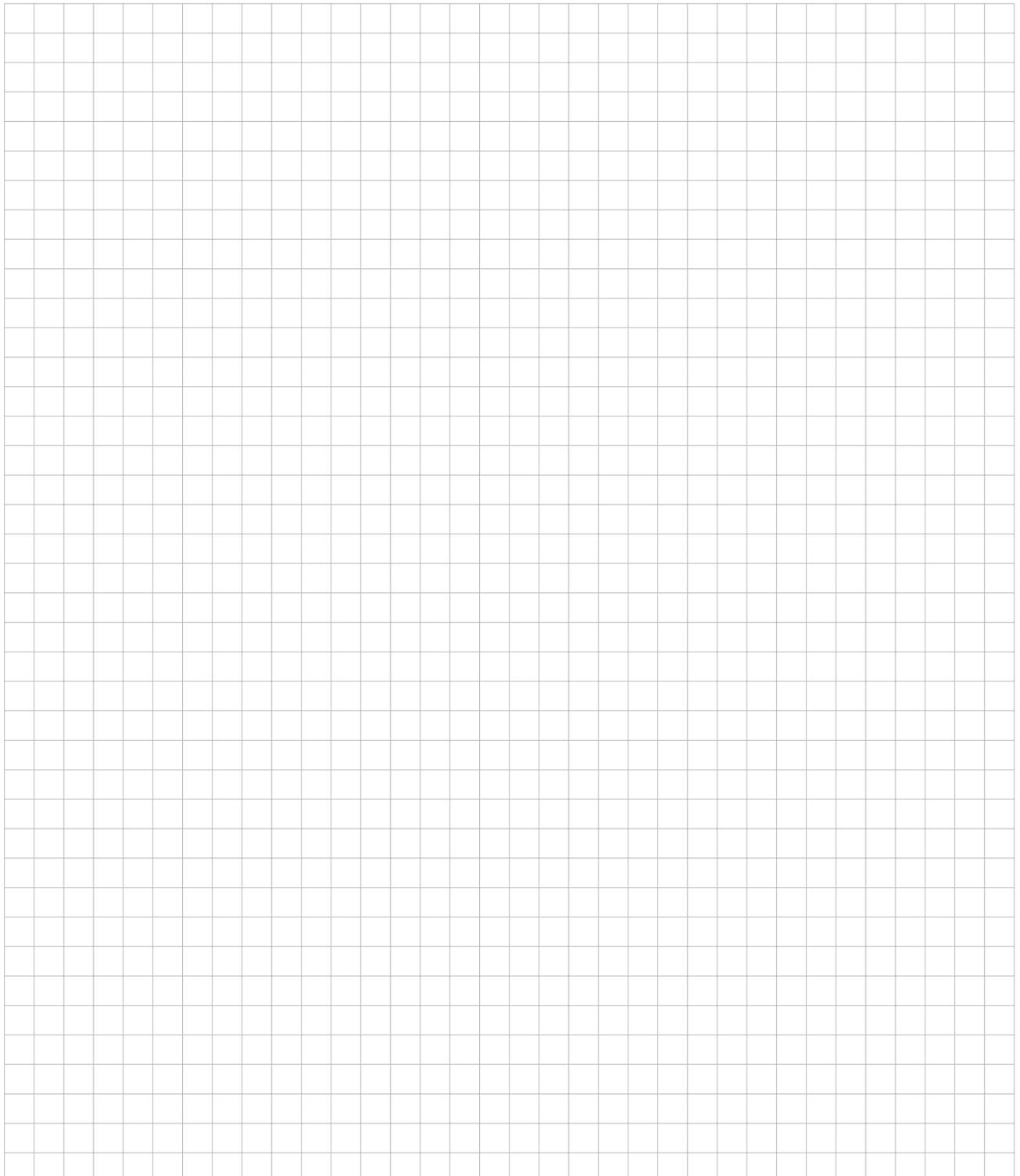
(i) $e^{i\frac{\pi}{4}}$ (3 P.)

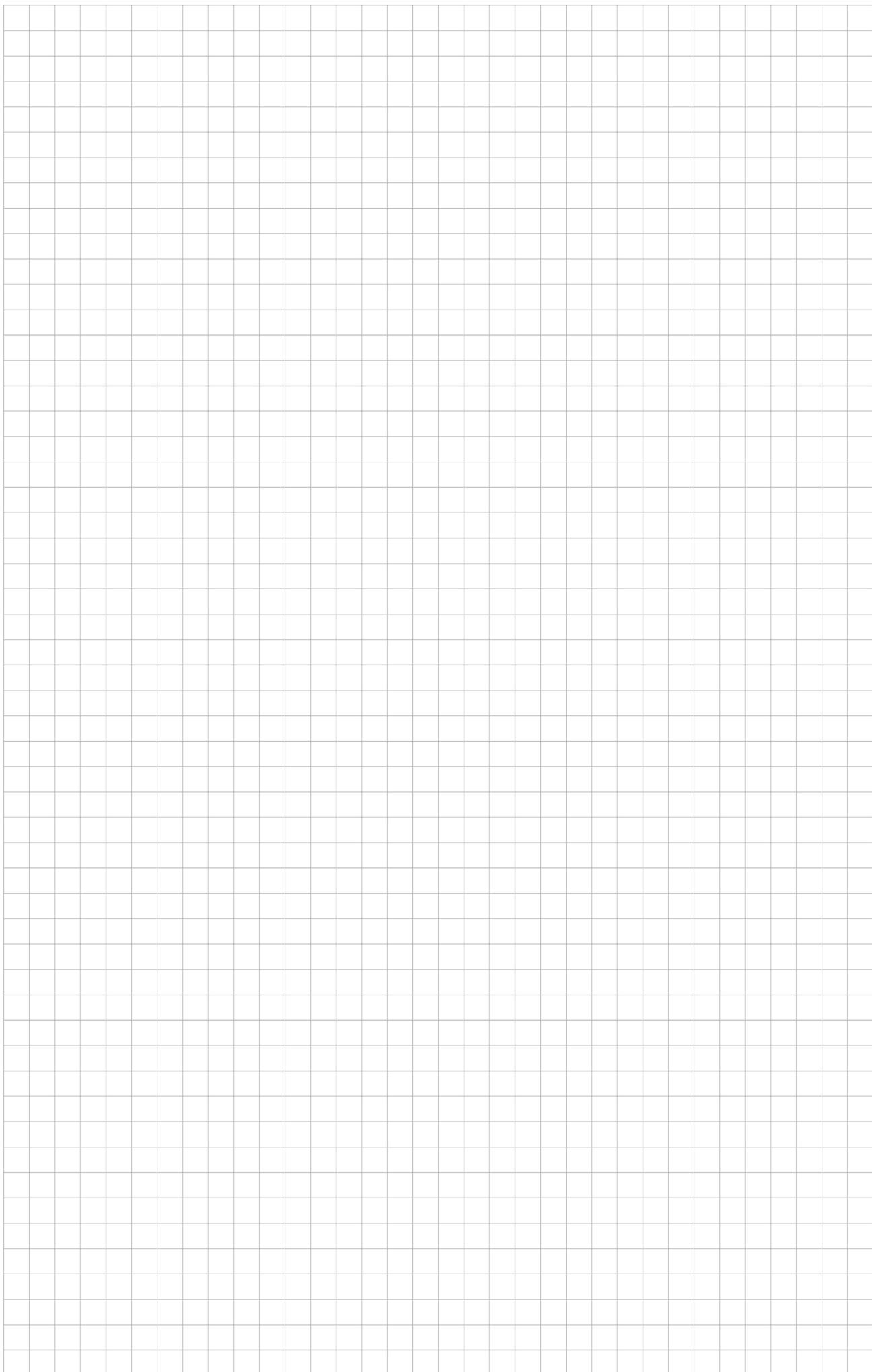
(ii) $\frac{3 + 2i}{5 + 7i}$ (3 P.)

(b) Skizzieren Sie die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z + 1|\}$$

in der Gauß'schen Zahlenebene \mathbb{C} . (4 P.)





Aufgabe 2: (10 Punkte)

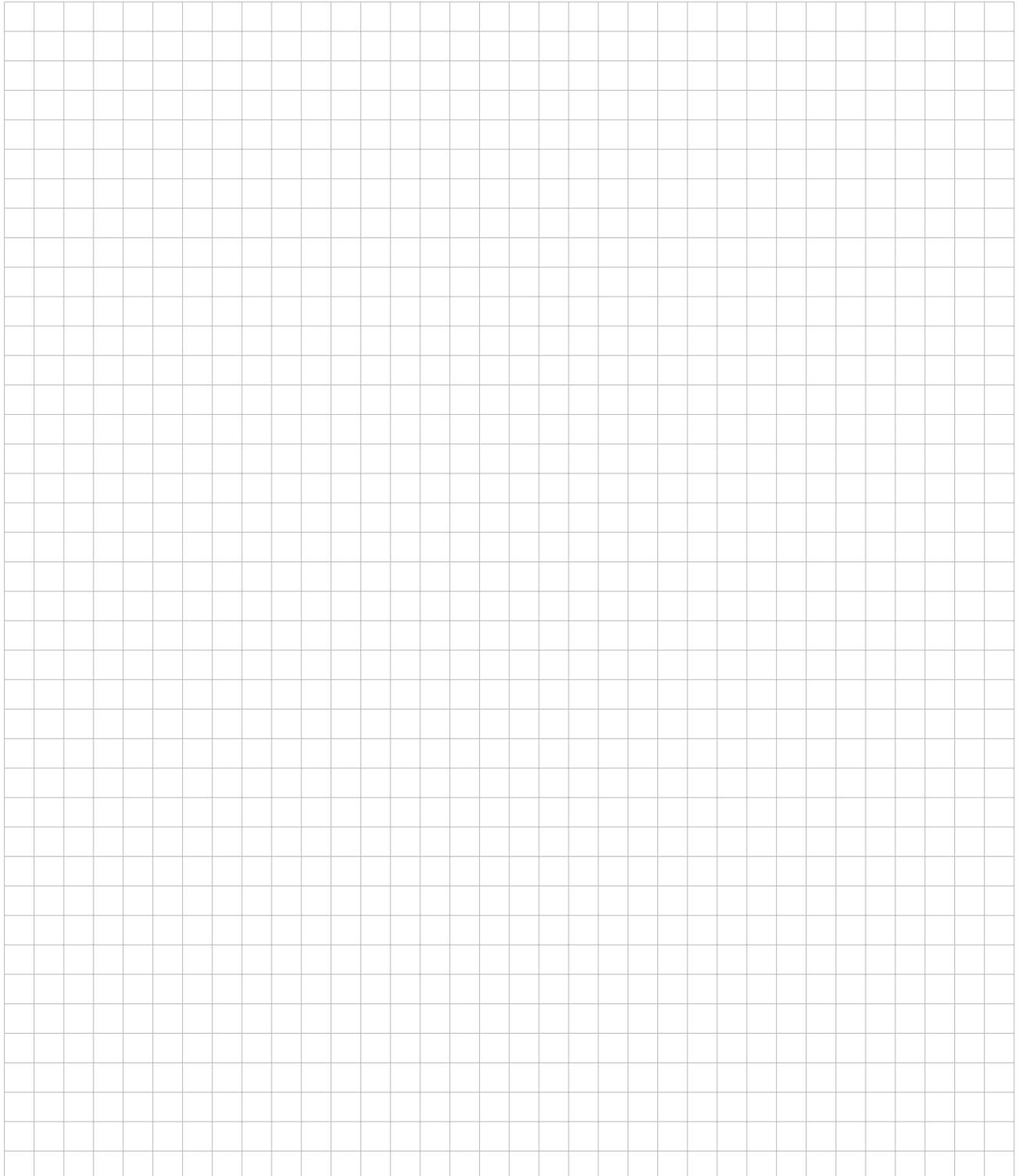
(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

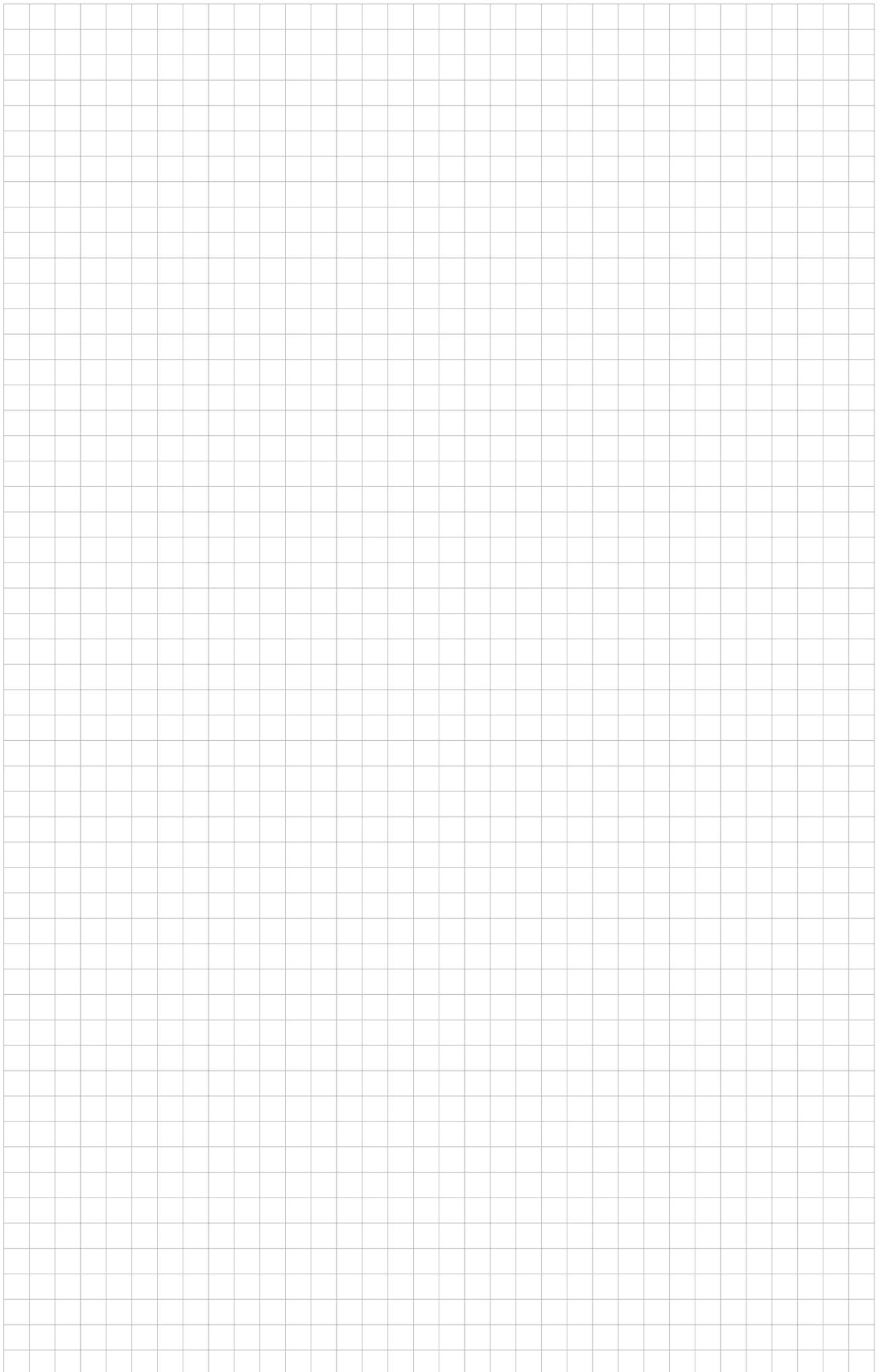
(i) Ist f stetig und D beschränkt, so ist $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. (3 P.)

(ii) Ist $D = [0, 1]$ und f konvex, so ist f stetig. (2 P.)

(iii) Ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{f(x)}$ stetig, so auch f . (3 P.)

(b) Geben Sie ein Beispiel einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, jedoch $f \neq 0$. (2 P.)





Aufgabe 3: (10 Punkte)

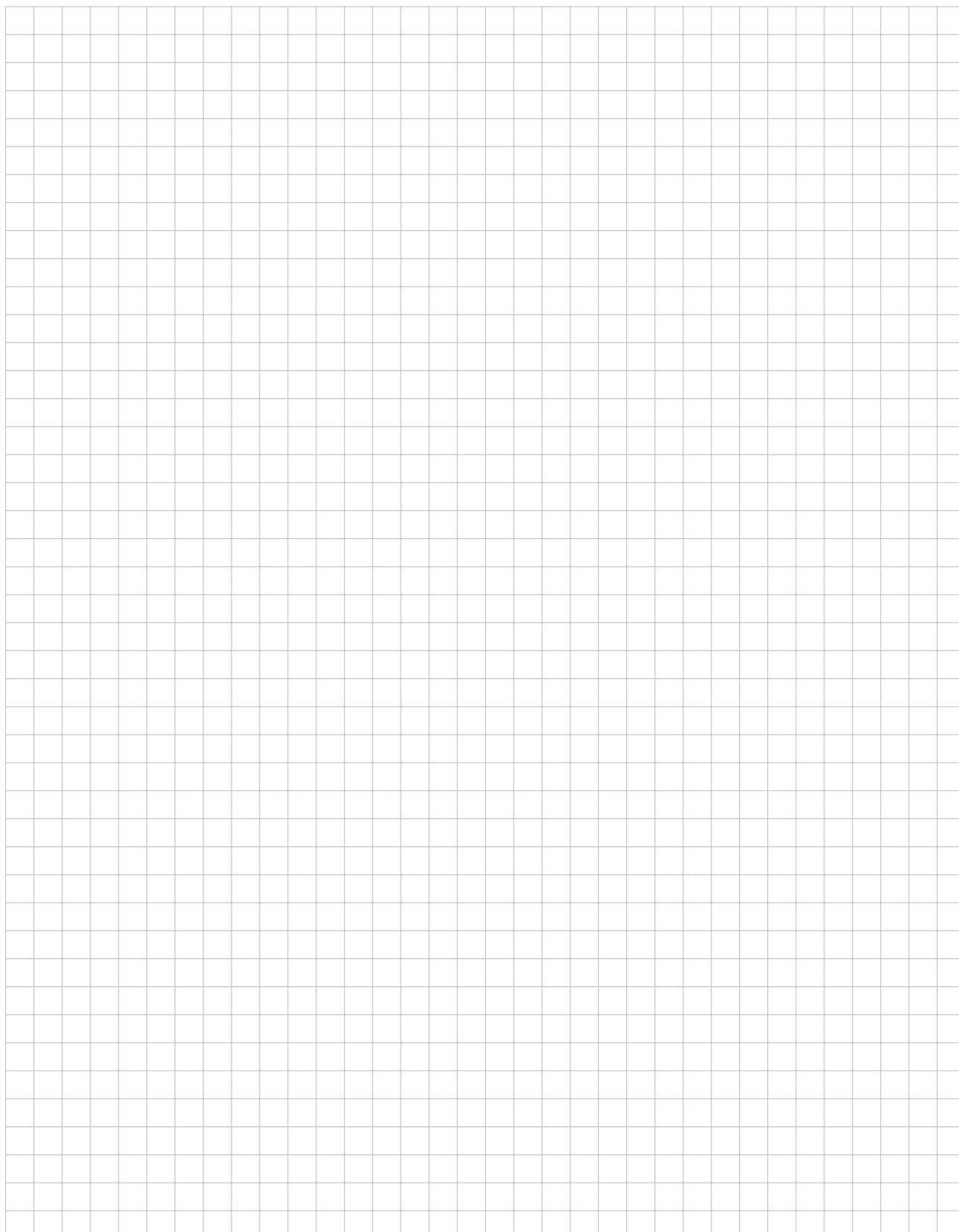
Sei $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ eine stetige Funktion mit

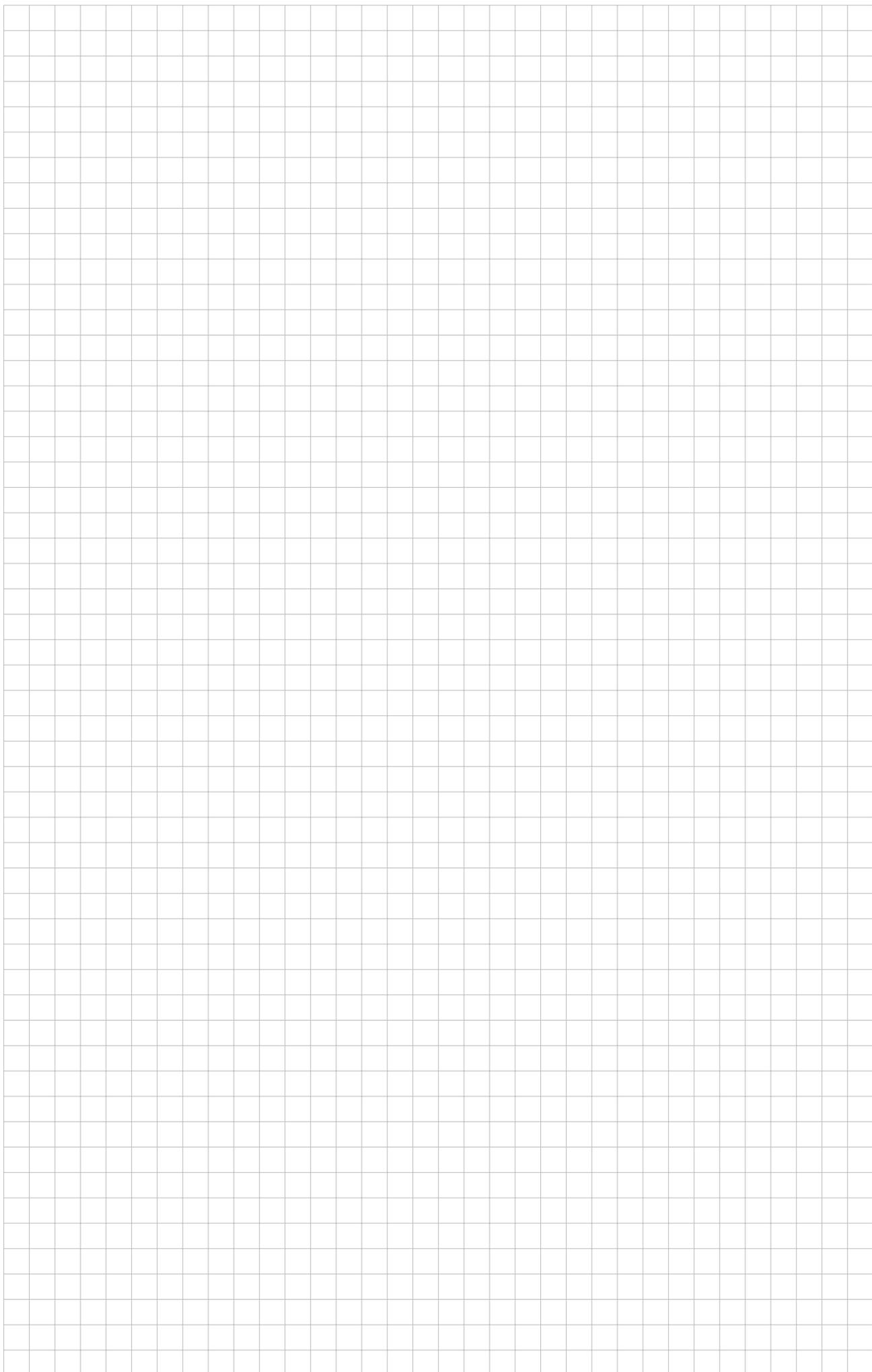
$$f(x) = f(\sqrt{x})$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass f konstant ist. *Hinweis: Eine Identität der Form*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (a > 0)$$

könnte nützlich sein.





Aufgabe 4: (10 Punkte)

Gegeben Sei die Funktion

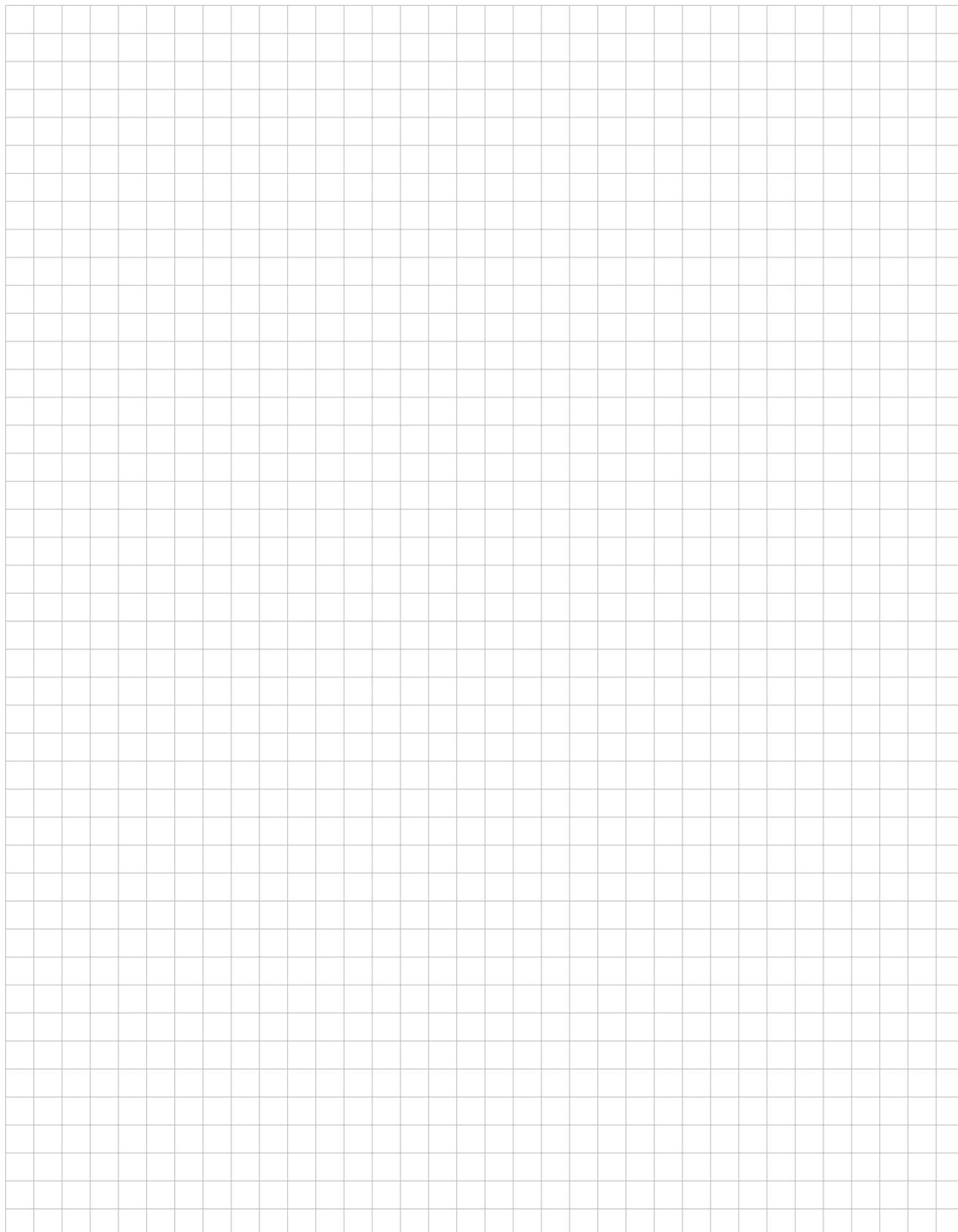
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x + \sum_{n=1}^{2020} x^{2n+1}.$$

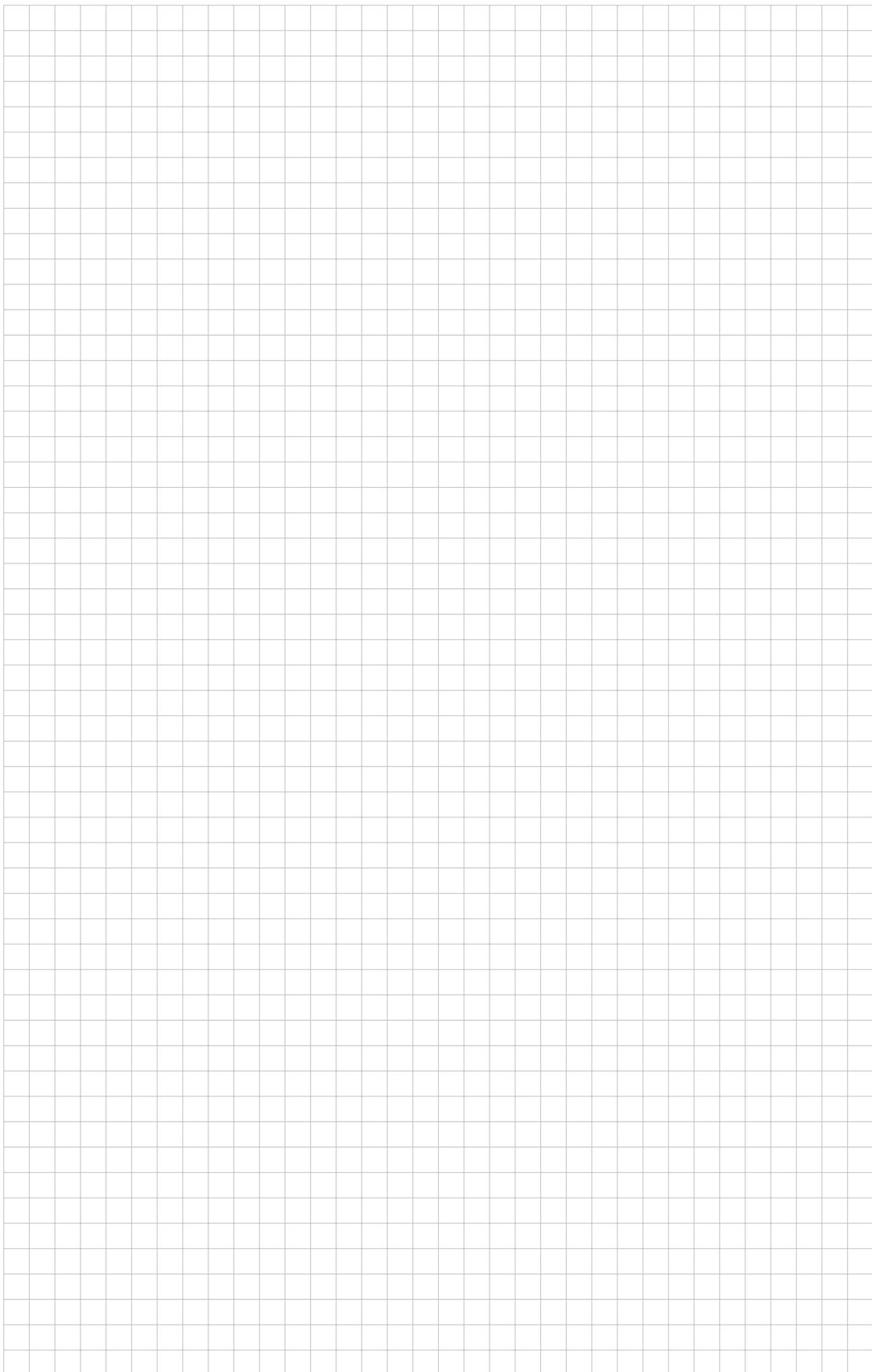
(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(6 P.)

(b) Bestimmen Sie $(f^{-1})'(1)$.

(4 P.)



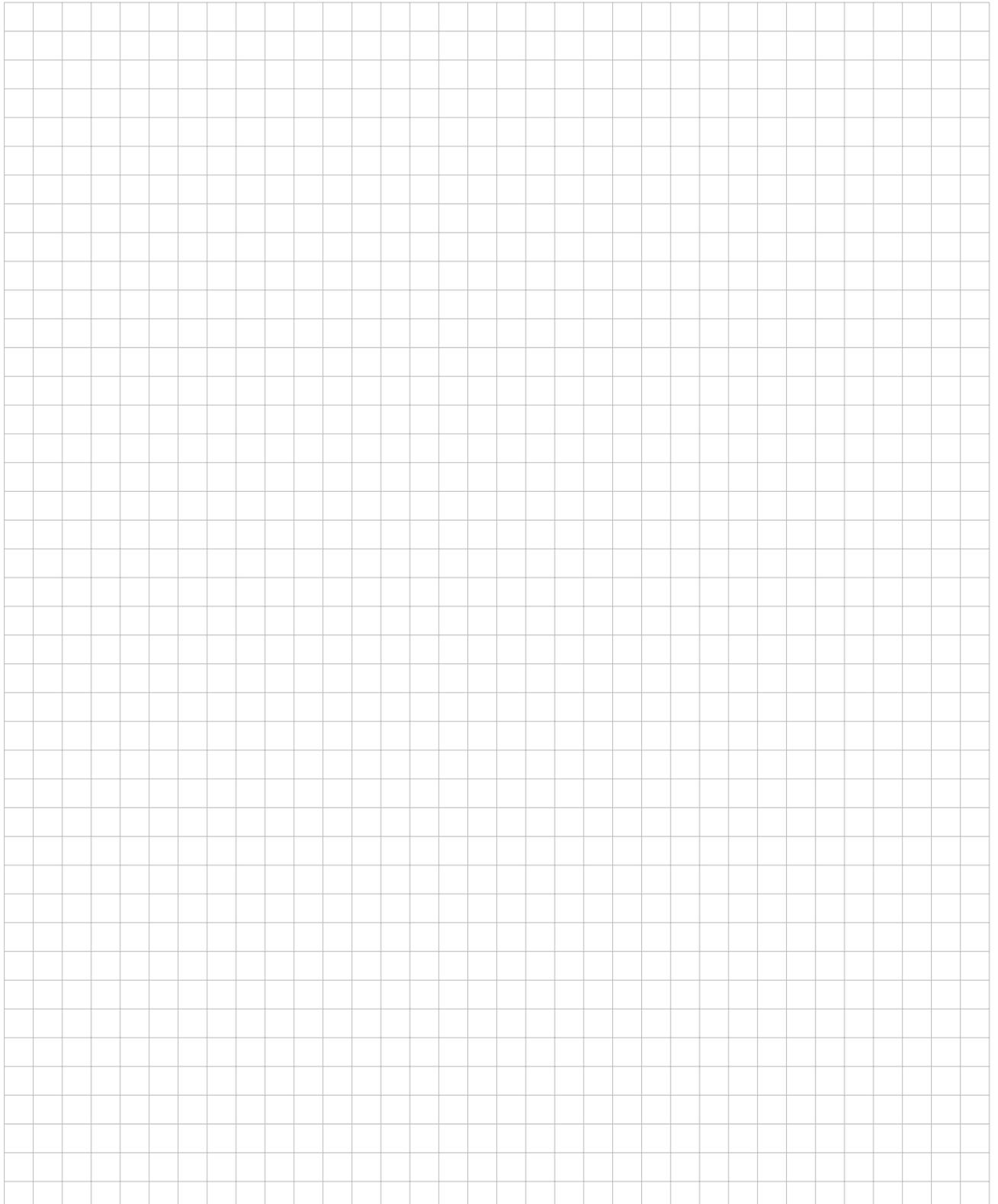


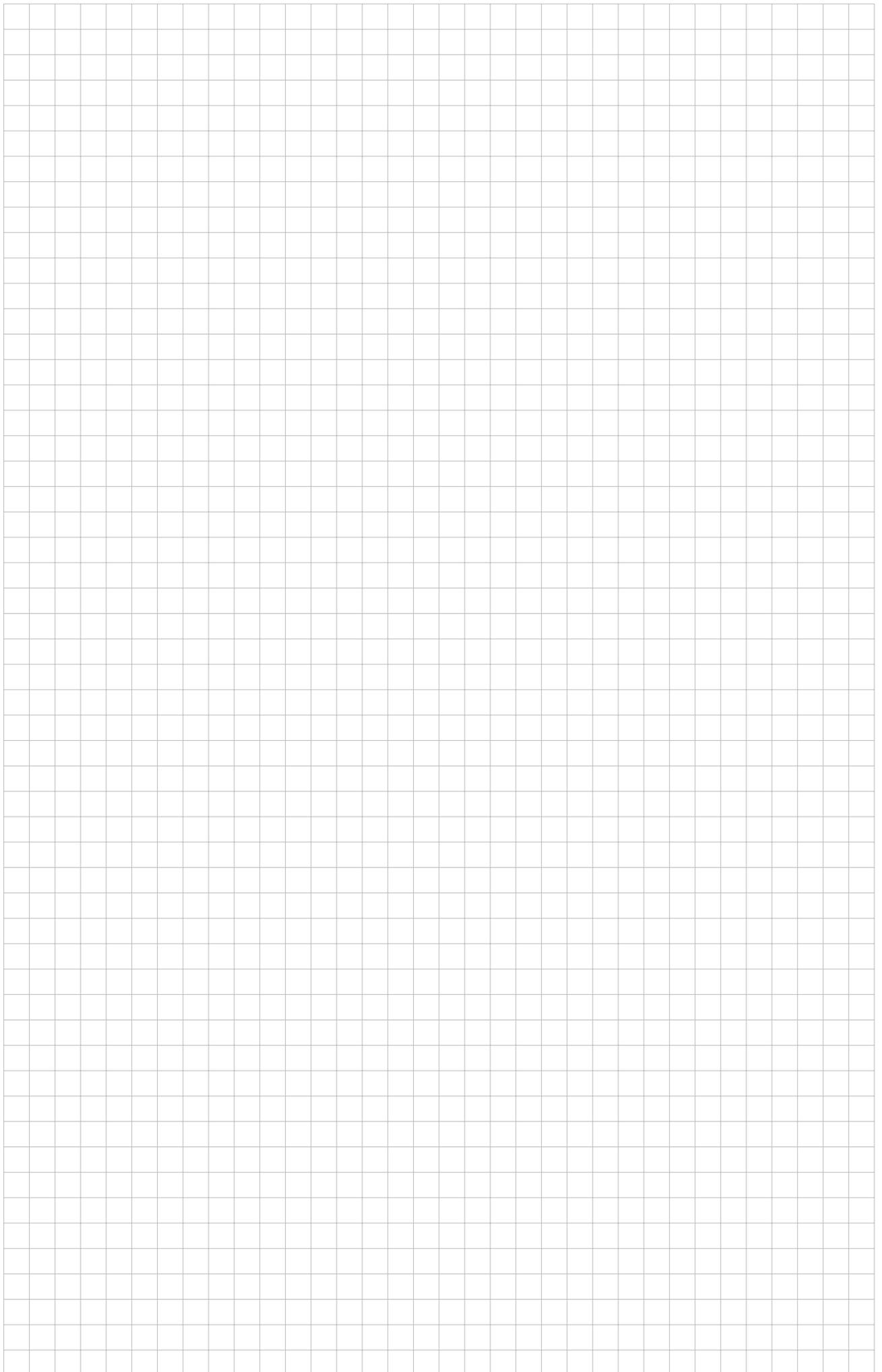
Aufgabe 5: (10 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Weisen Sie nach, dass die Funktion f stetig ist. (3 P.)
- (b) Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + \frac{1}{2}x$. Zeigen Sie, dass g symmetrisch ist: $g(x) = g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (3 P.)
- (c) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist. (4 P.)





Aufgabe 6: (10 Punkte)

(a) Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit folgendem Konvergenzradius R an:

- (a) $R = 0$, (2 P.)
- (b) $R = \infty$, (2 P.)
- (c) $R = 2$. (2 P.)

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!} z^n.$$

(4 P.)



