Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020
1. Klausur

Analysis 1

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Alle Hilfsmittel in Papierform sind erlaubt; *elektronische Hilfsmittel sind verboten.*
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben (je 10 Punkte). Man hat bestanden, wenn man mindestens 30 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Summe**

Aufgabe 1: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag folgender komplexer Zahlen:

(i) $e^{i\frac{\pi}{4}}$ (3 P.)

(ii) $\dfrac{3+2i}{5+7i}$ (3 P.)

(b) Skizzieren Sie die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+1|\}$$

in der Gauß'schen Zahlenebene $\mathbb{C}$. (4 P.)

Aufgabe 2: (10 Punkte)

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist f stetig und D beschränkt, so ist $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. (3 P.)

(ii) Ist $D = [0, 1]$ und f konvex, so ist f stetig. (2 P.)

(iii) Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{f(x)}$ stetig, so auch f. (3 P.)

(b) Geben Sie ein Beispiel einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, jedoch $f \neq 0$. (2 P.)

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Sei $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ eine stetige Funktion mit

$$f(x) = f(\sqrt{x})$$

für alle $x \in (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass f konstant ist. *Hinweis: Eine Identität der Form*

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad (a > 0)$$

könnte nutzlich sein.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Gegeben Sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x + \sum_{n=1}^{2020} x^{2n+1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist. (6 P.)

(b) Bestimmen Sie $(f^{-1})'(1)$. (4 P.)

Aufgabe 5: (10 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Weisen Sie nach, dass die Funktion f stetig ist. (3 P.)

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + \frac{1}{2}x$. Zeigen Sie, dass g symmetrisch ist: $g(x) = g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (3 P.)

(c) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist. (4 P.)

Aufgabe 6: (10 Punkte)

(a) Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit folgendem Konvergenzradius R an:

(a) $R = 0$, (2 P.)

(b) $R = \infty$, (2 P.)

(c) $R = 2$. (2 P.)

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!} z^n.$$

(4 P.)