

## Analysis 1

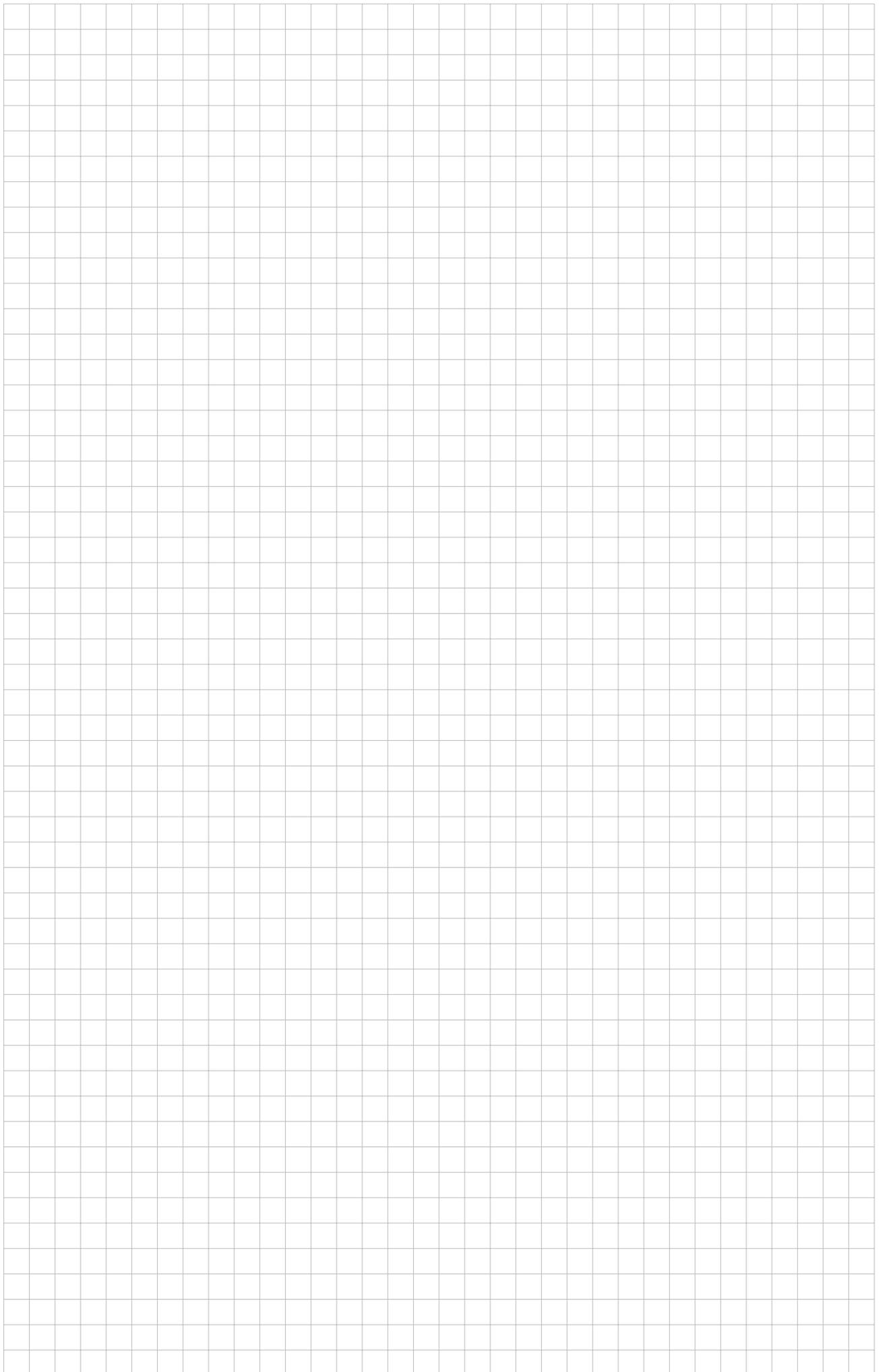
Name:
Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Alle Hilfsmittel in Papierform sind erlaubt; *elektronische Hilfsmittel sind verboten*.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben (je 10 Punkte). Man hat bestanden, wenn man mindestens 30 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

---

1	2	3	4	5	6	Summe



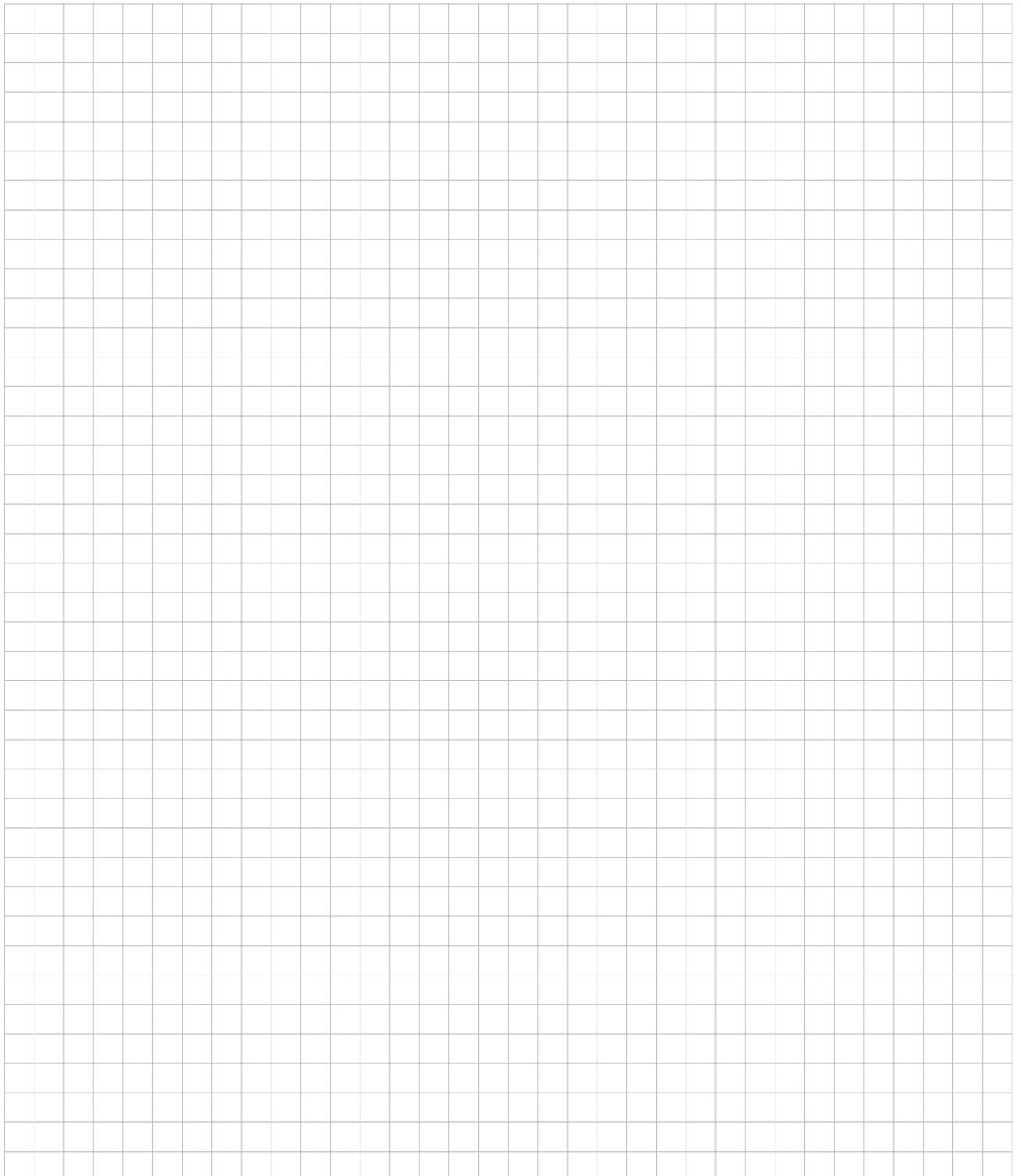
**Aufgabe 1:** (10 Punkte)

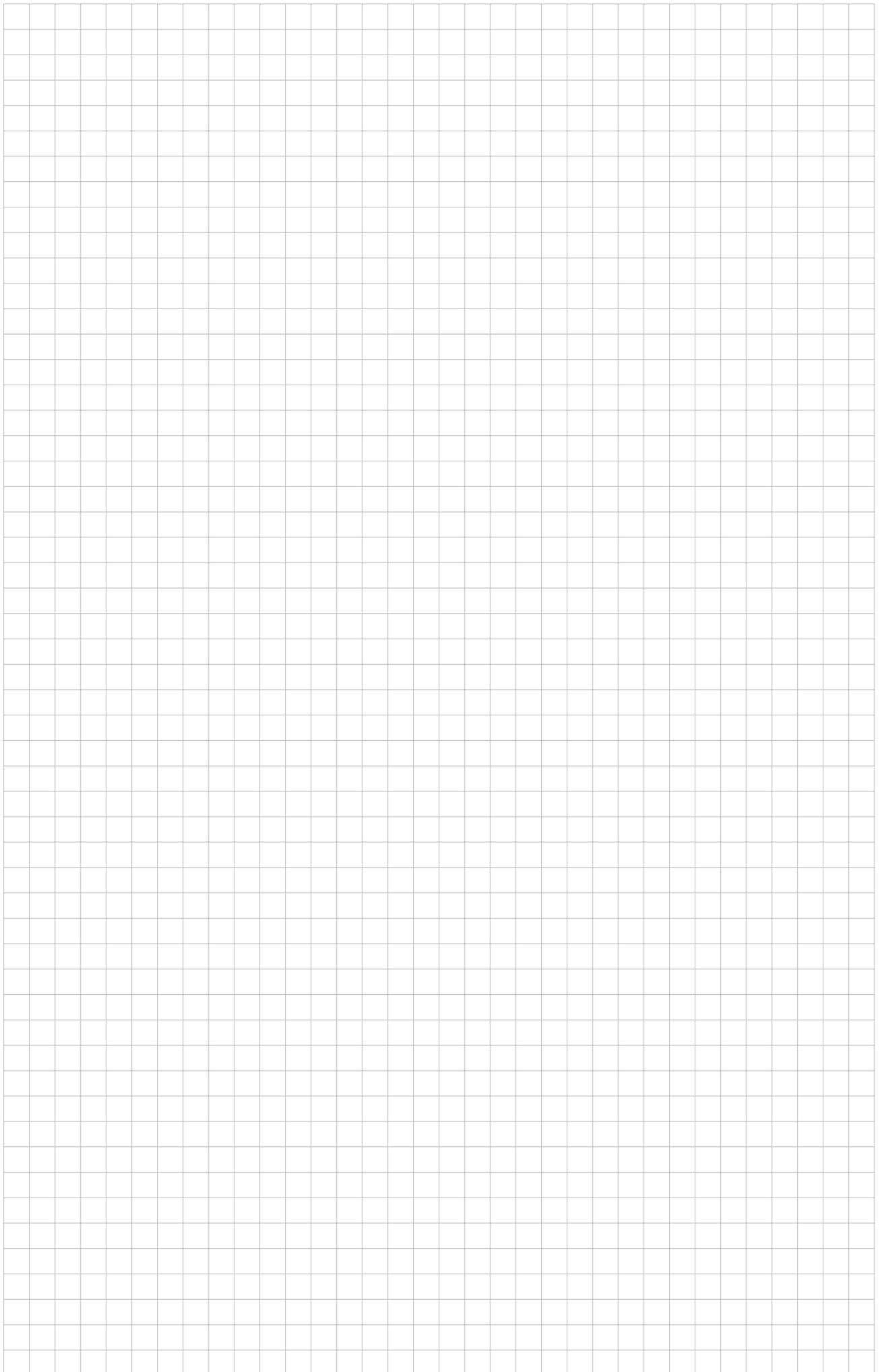
- (a) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung  $z^2 + 5 = 0$  in Polarkoordinaten.  
(4 P.)
- (b) Entscheiden Sie, ob die komplexe Folge  $(e^{\frac{2\pi in}{2020}})_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge besitzt.  
(2 P.)
- (c) Skizzieren Sie die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 2, \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$$

in der Gauß'schen Zahlenebene  $\mathbb{C}$ .

(4 P.)





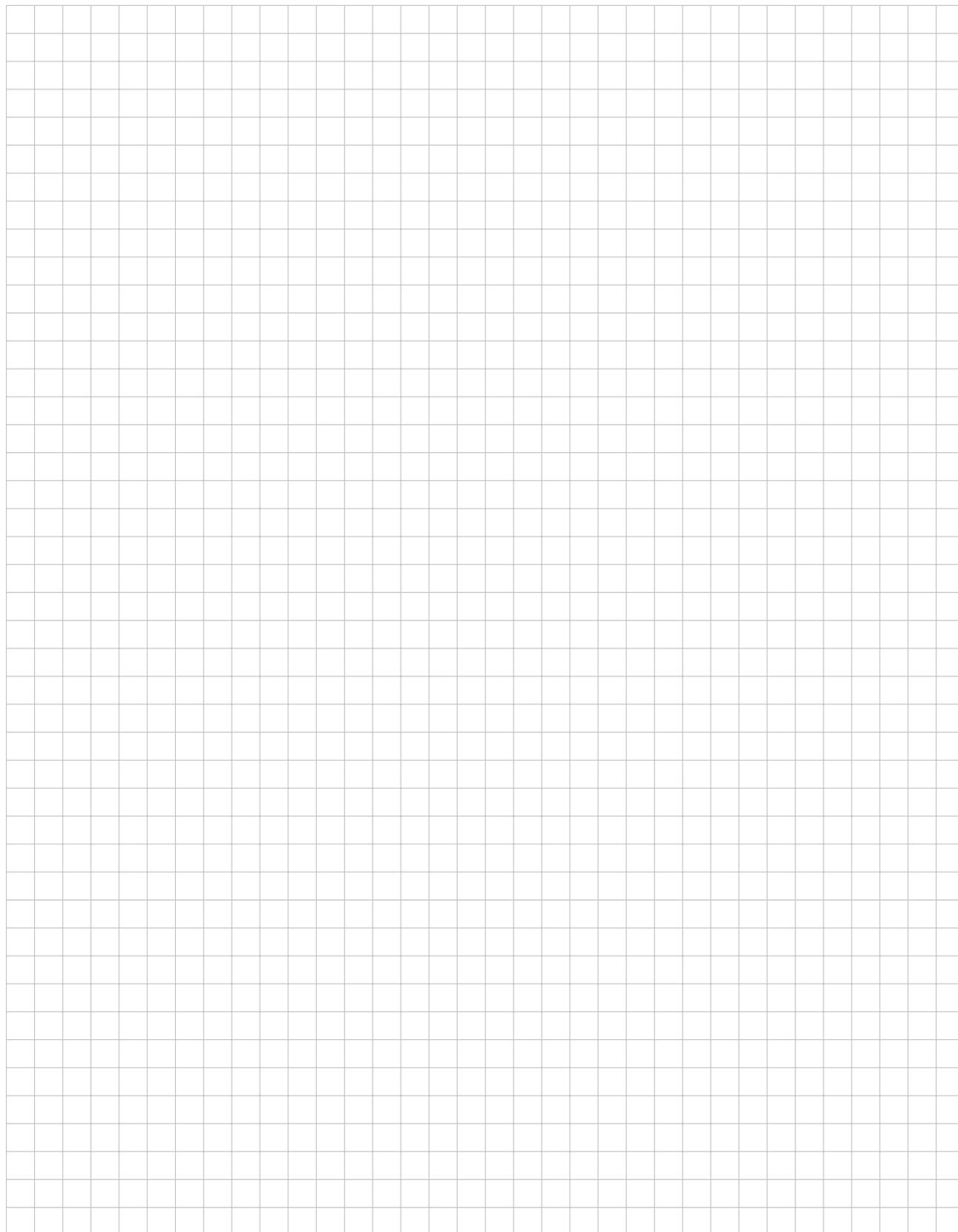
**Aufgabe 2:** (10 Punkte)

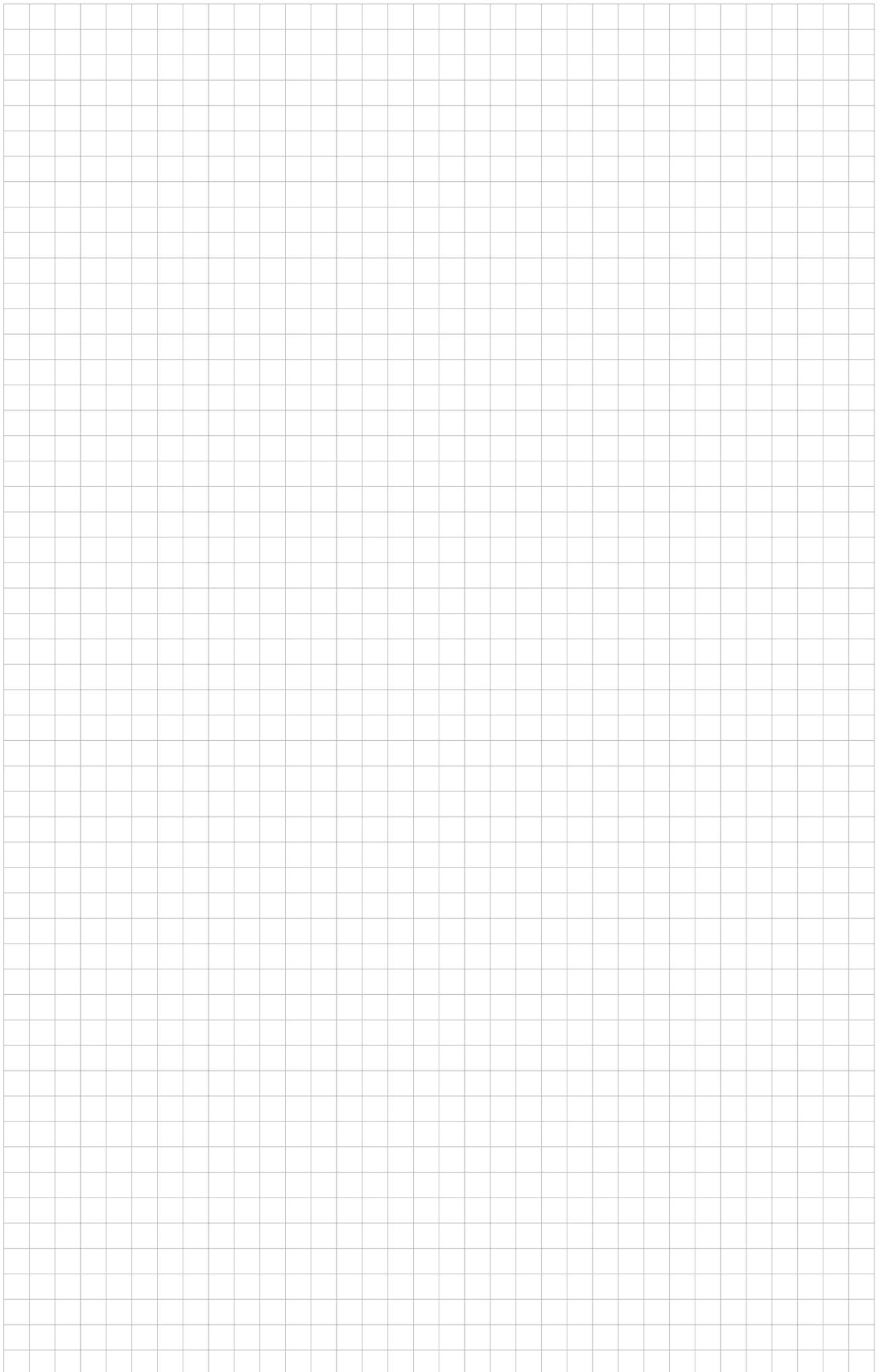
Gegeben sei die Menge

$$A := \left\{ \frac{|1 - xy|}{(1 + x^2)(1 + y^2)} : x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß  $0 \leq a \leq 1$  für alle  $a \in A$ . (4 P.)

(b) Bestimmen Sie  $\sup(A)$  und  $\inf(A)$ . Existieren  $\max(A)$  und  $\min(A)$ ? (6 P.)





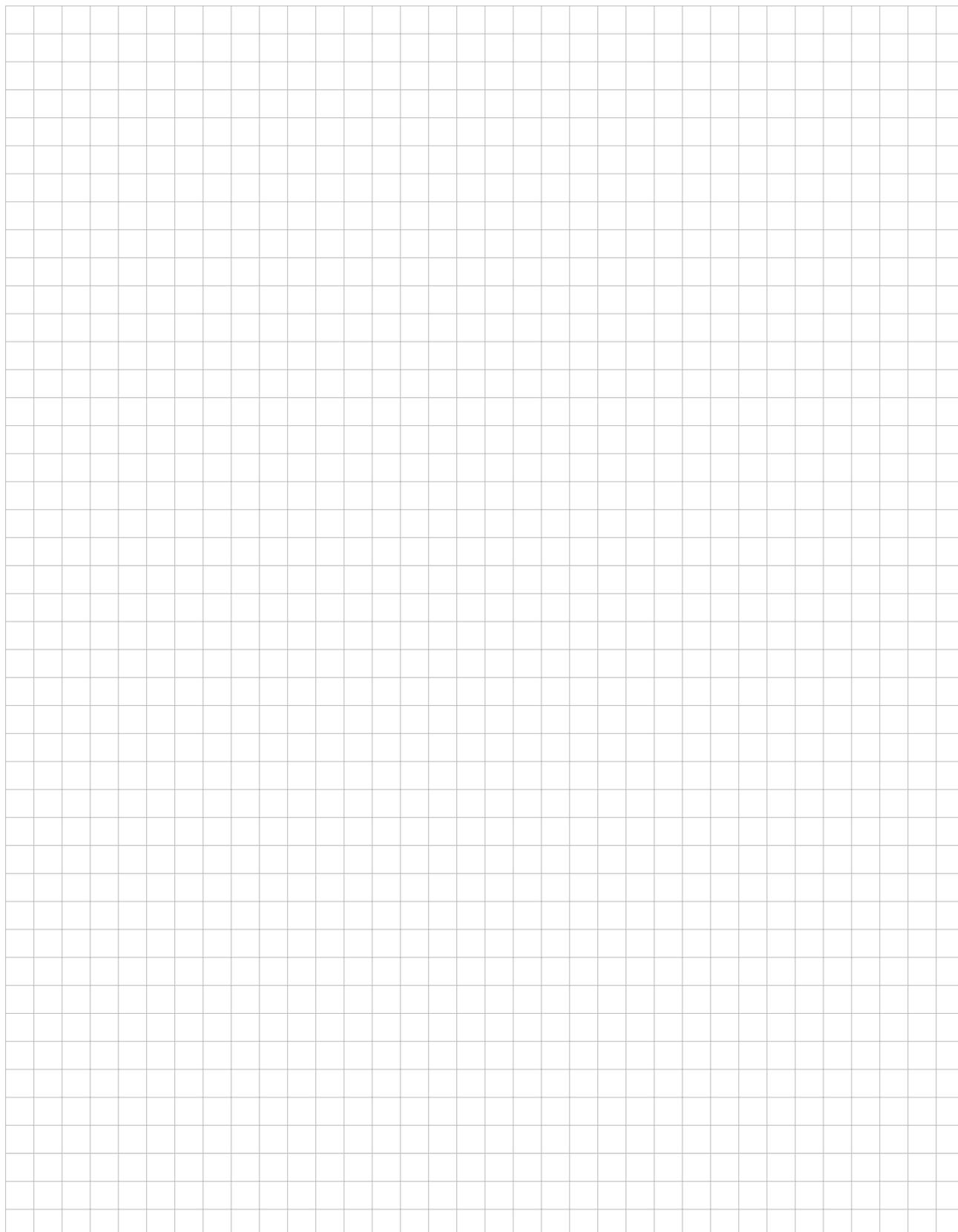
**Aufgabe 3:** (10 Punkte)

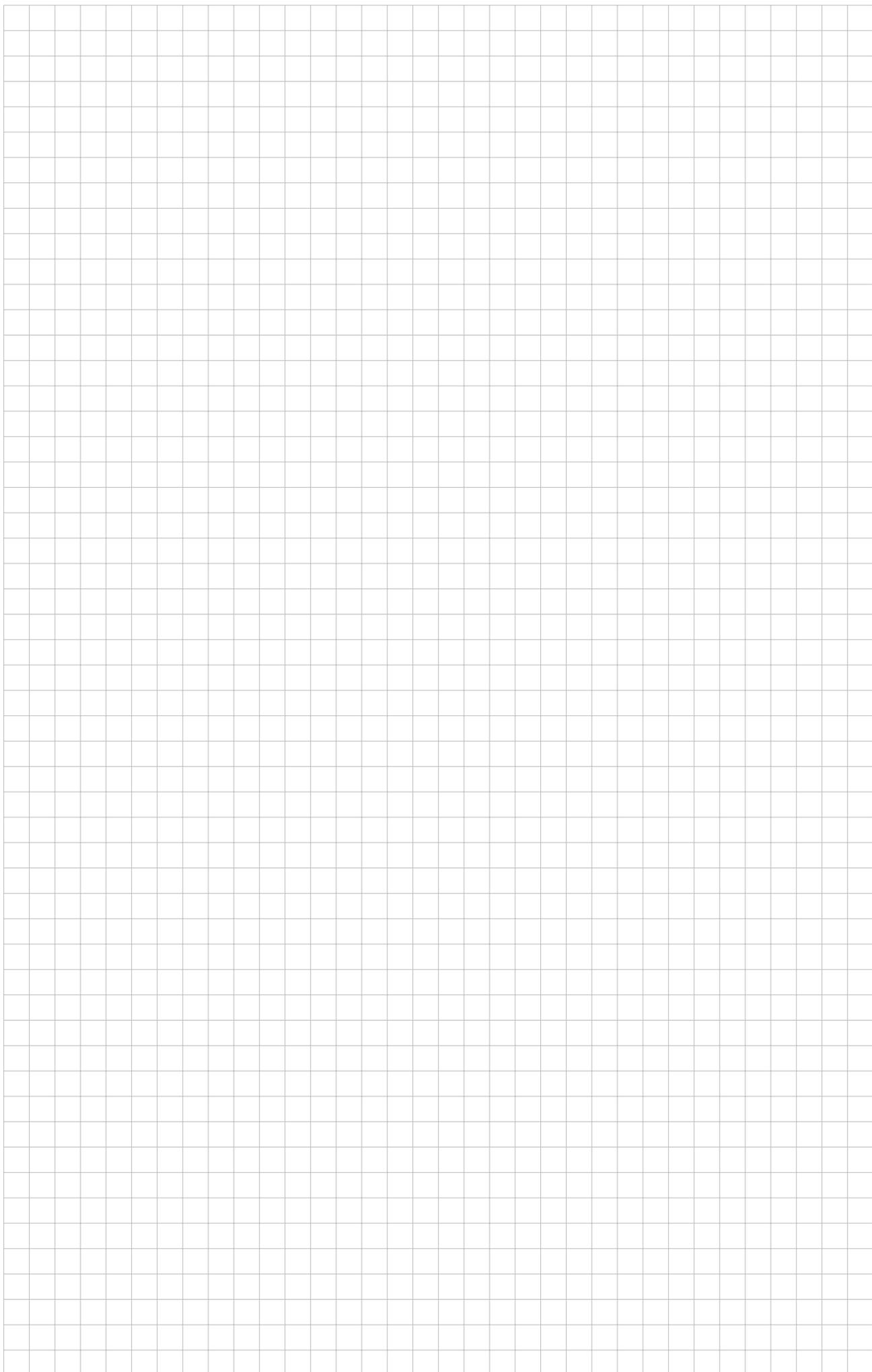
Gegeben sei die rekursiv definierte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , wobei

$$a_0 = 0$$
$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(a) Zeigen Sie, daß die Folge monoton wächst und beschränkt ist. (6 P.)

(b) Zeigen Sie, daß die Folge konvergent ist und bestimmen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . (4 P.)

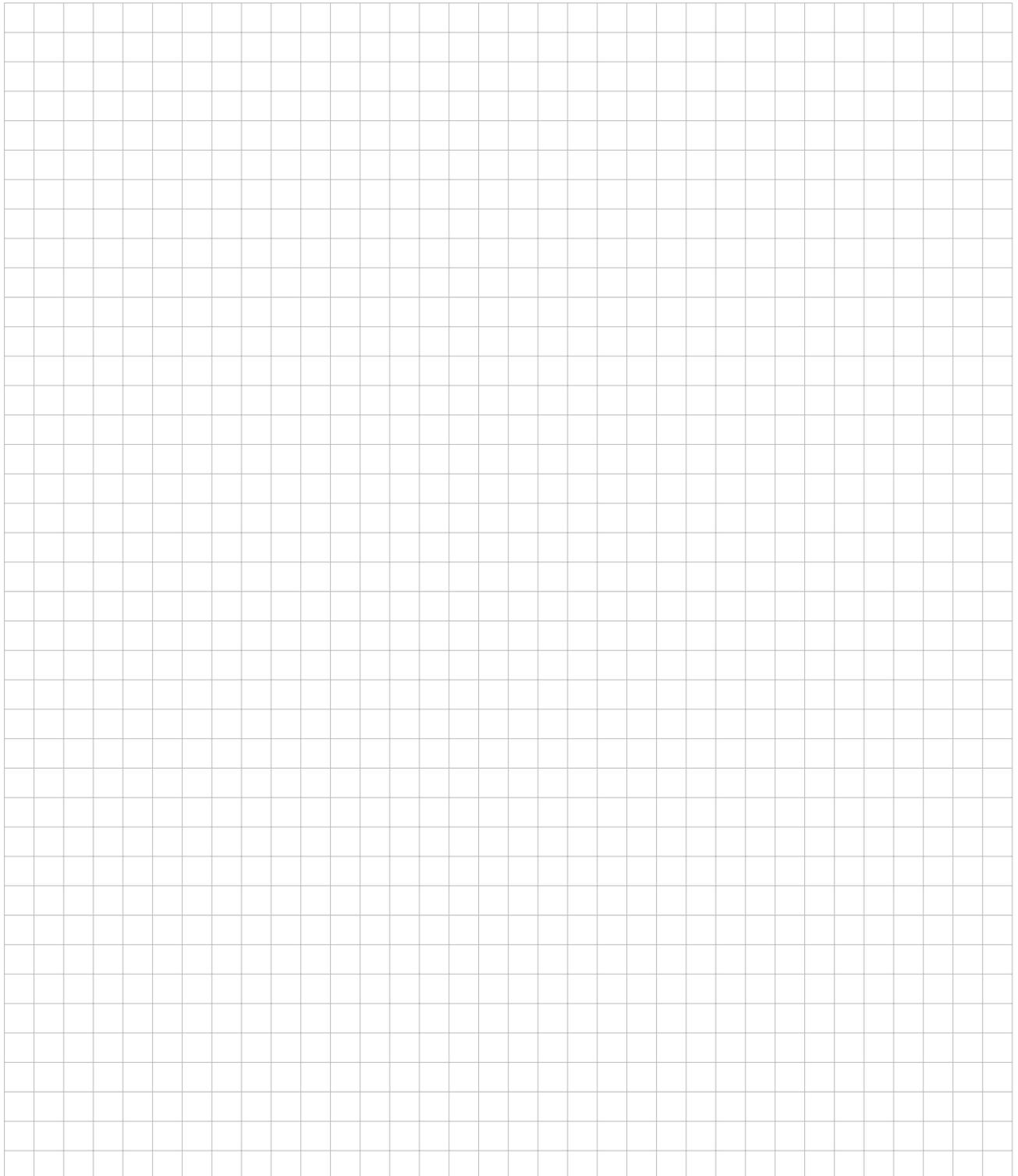


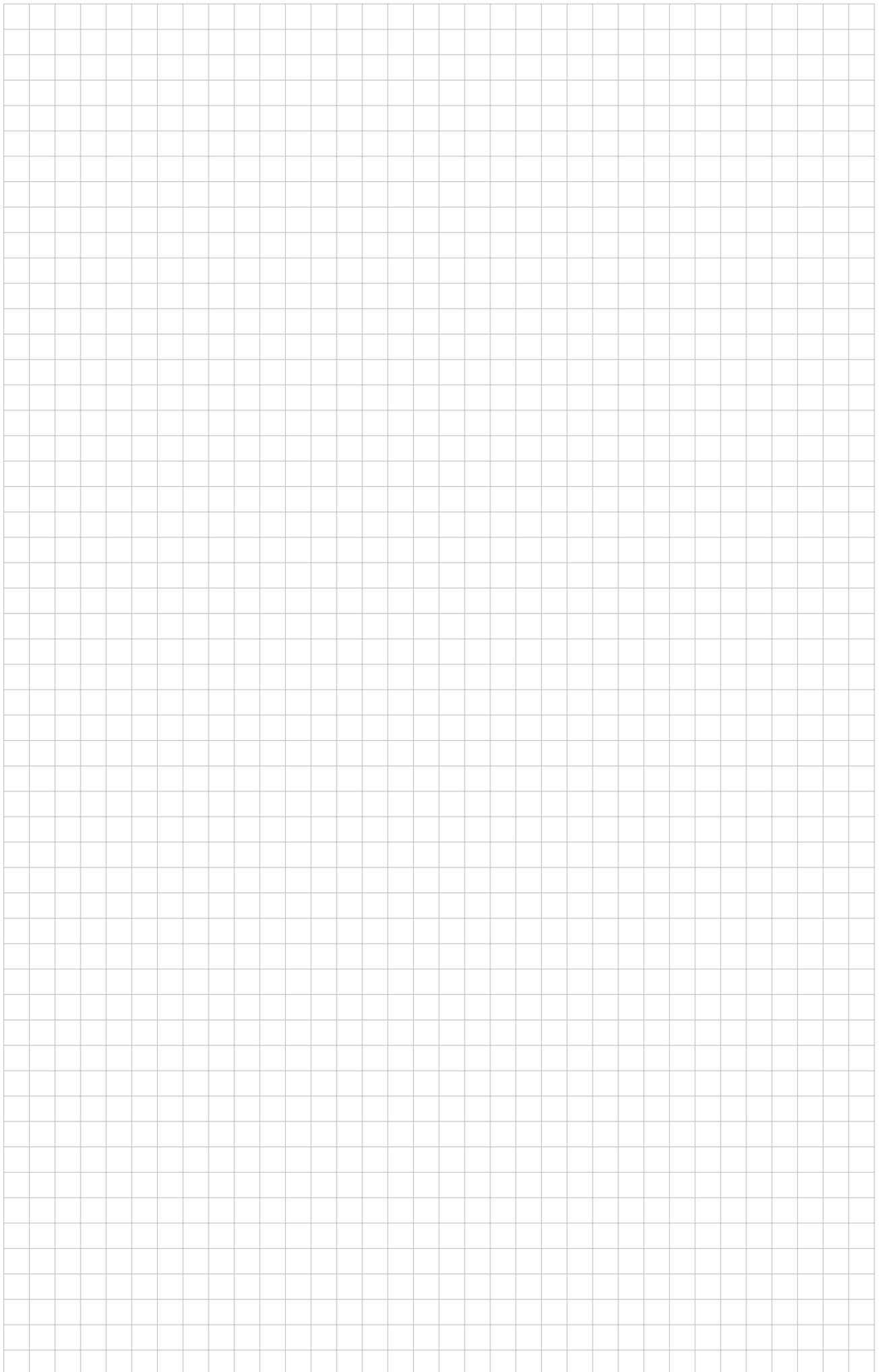


**Aufgabe 4:** (10 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

- (a) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erklärt durch  $F(x) = e^{f(x)}$ . Ist  $F$  stetig, so auch  $f$ . (3 P.)
- (b) Sei  $f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Folge differenzierbarer Funktionen, welche gleichmäßig gegen  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  differenzierbar. (3 P.)
- (c) Jede beschränkte Folge positiver Zahlen ist konvergent. (2 P.)
- (d) Jede punktweise konvergente Folge stetiger Funktionen  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  hat eine stetige Grenzfunktion. (2 P.)





**Aufgabe 5:** (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

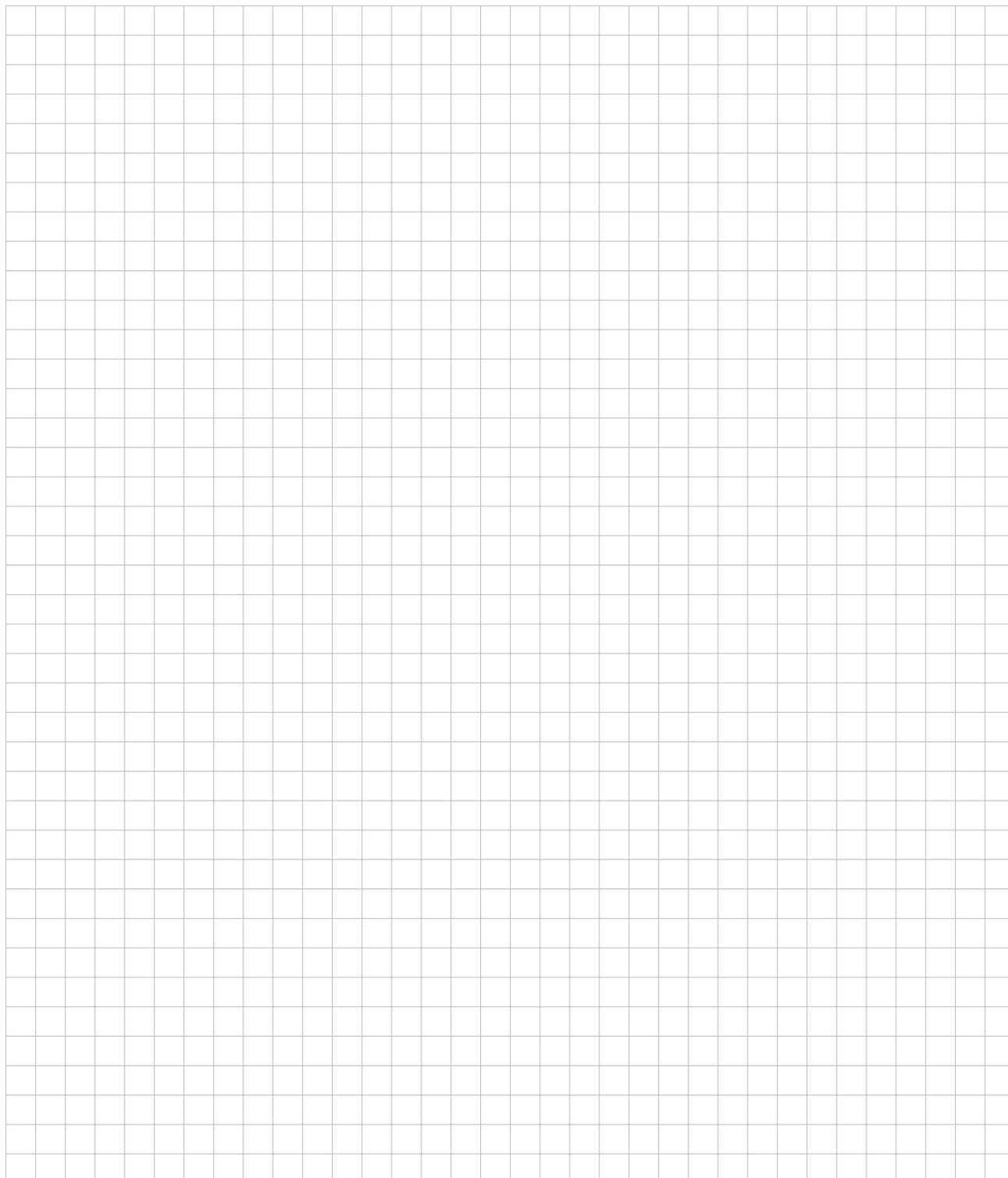
$$G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{\sinh(z^2)}{z} & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

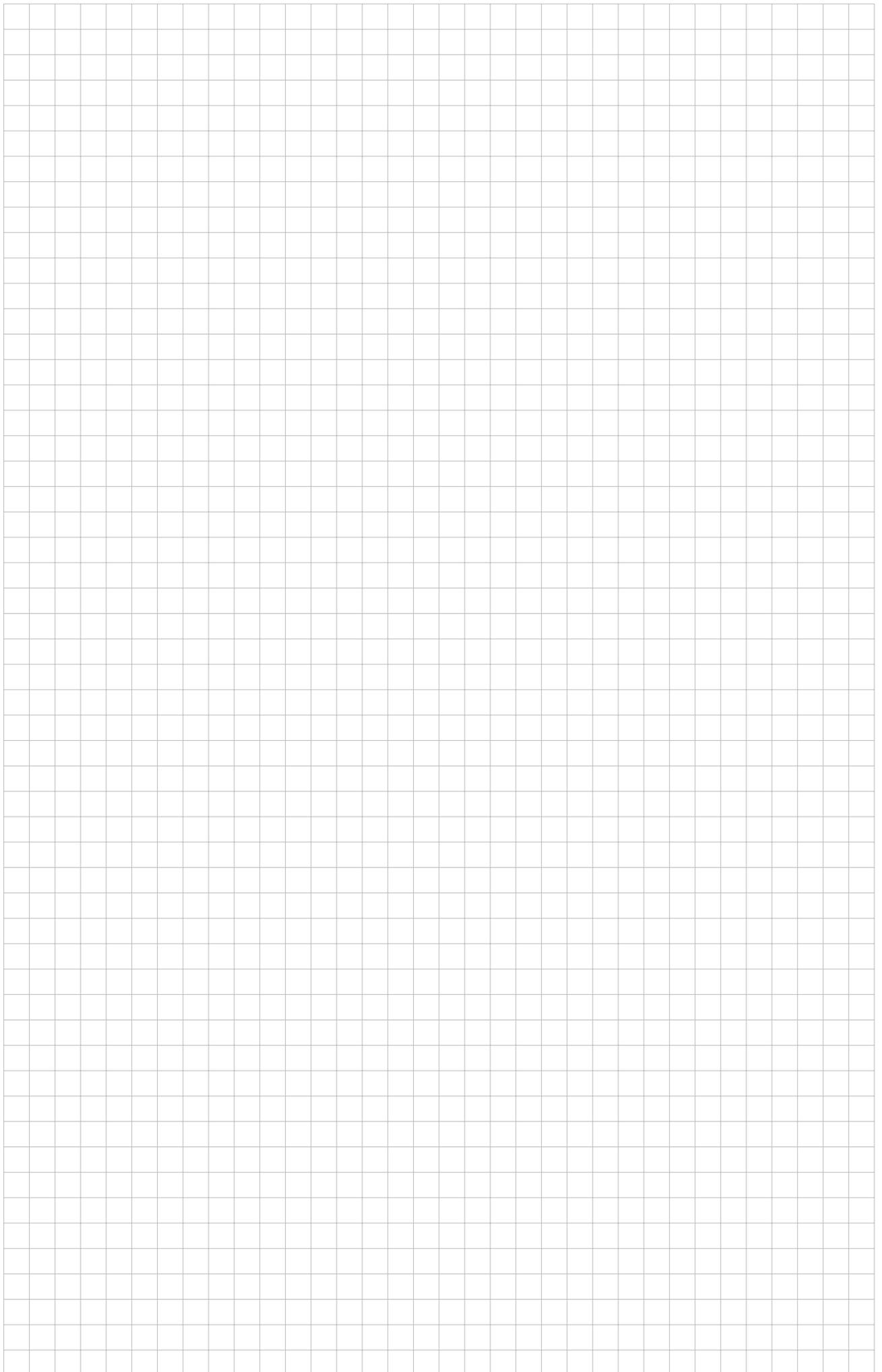
(a) Zeigen Sie, daß  $G$  durch eine konvergente Potenzreihe

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

gegeben ist und bestimmen Sie den Konvergenzradius  $R$ . (6 P.)

(b) Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Einschränkung von  $G$  auf  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie, daß  $F$  bijektiv ist. (4 P.)





**Aufgabe 6:** (10 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}.$$

(a) Ermitteln Sie  $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$  sowie  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  und skizzieren Sie den Graphen von  $f$ .  
(6 P.)

(b) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a < b$ . Berechnen Sie das Integral (4 P.)

$$\int_a^b f(x) dx.$$

