Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020
2. Klausur

Analysis 1

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Alle Hilfsmittel in Papierform sind erlaubt; *elektronische Hilfsmittel sind verboten.*
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben (je 10 Punkte). Man hat bestanden, wenn man mindestens 30 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Summe**

Aufgabe 1: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 + 5 = 0$ in Polarkoordinaten. (4 P.)

(b) Entscheiden Sie, ob die komplexe Folge $(e^{\frac{2\pi i n}{2020}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. (2 P.)

(c) Skizzieren Sie die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 2, \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$$

in der Gauß'schen Zahlenebene $\mathbb{C}$. (4 P.)

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Gegeben sei die Menge

$$A := \left\{ \frac{|1 - xy|}{(1 + x^2)(1 + y^2)} : x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $0 \leq a \leq 1$ für alle $a \in A$. (4 P.)

(b) Bestimmen Sie $\sup(A)$ und $\inf(A)$. Existieren $\max(A)$ und $\min(A)$? (6 P.)

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wobei

$$a_0 = 0$$
$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(a) Zeigen Sie, daß die Folge monoton wächst und beschränkt ist. (6 P.)

(b) Zeigen Sie, daß die Folge konvergent ist und bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$. (4 P.)

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erklärt durch $F(x) = e^{f(x)}$. Ist F stetig, so auch f. (3 P.)

(b) Sei $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge differenzierbarer Funktionen, welche gleichmäßig gegen $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f differenzierbar. (3 P.)

(c) Jede beschränkte Folge positiver Zahlen ist konvergent. (2 P.)

(d) Jede punktweise konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ hat eine stetige Grenzfunktion. (2 P.)

Aufgabe 5: (10 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{\sinh(z^2)}{z} & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, daß G durch eine konvergente Potenzreihe

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

gegeben ist und bestimmen Sie den Konvergenzradius R. (6 P.)

(b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Einschränkung von G auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß F bijektiv ist. (4 P.)

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}.$$

(a) Ermittlen Sie $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$ sowie $\lim_{x \to \infty} f(x)$ und skizzieren Sie den Graphen von f. (6 P.)

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Berechnen Sie das Integral (4 P.)

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$