Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

Name:

Matrikelnummer:

Studieren Sie Lehramt und haben schon die Studienleistung?

Ja: ☐ Nein: ☐

Wichtige Informationen:

- Alle Hilfsmittel in Papierform sind erlaubt; *elektronische Hilfsmittel sind verboten.*
- Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Die Klausur besteht aus vier Aufgaben (je 10 Punkte). Man hat bestanden, wenn man mindestens 12 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

1	**2**	**3**	**4**	**Summe**

Aufgabe 1: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag folgender komplexer Zahlen.

i. $\dfrac{3+4i}{1+2i}$, (3 P.)

ii. $(1-i)^{8n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. (4 P.)

(b) Skizzieren Sie die Menge $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$ in der Gaußschen Zahlenebene. (3 P.)

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+17}{n^3+1}$, (3 P.)

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{3^n}$, (3 P.)

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. (4 P.)

Aufgabe 3: (10 Punkte)

(a) Für $n \in \mathbb{N}$, sei $a_n := \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ falls n gerade und $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$ falls n ungerade ist.

i. Untersuchen Sie, ob das Supremum von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ existiert und bestimmen Sie es gegebenenfalls. (2 P.)

ii. Untersuchen Sie, ob das Infimum von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ existiert und bestimmen Sie es gegebenenfalls. (2 P.)

iii. Bestimmen Sie die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (2 P.)

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ die Zahl, sodass $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$. Sei q eine vorgegebene reelle Zahl. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n := nq - \lfloor nq \rfloor$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Ist q rational, so hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur endlich viele Häufungspunkte. (4 P.)

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Ist $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (3 P.)

(b) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe reeller Zahlen. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so auch $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. (3 P.)

(c) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Dann ist $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. (4 P.)