Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

10. Anleitung zum Selbststudium

(KW26)

Die Themen der Woche sind: Integral für stetige Funktionen auf Quadern mit Transformationsformel. Kurz und hinreichend allgemein für das erste Verständnis ist [S2, §2.1] mit [S2, §4.1]. Falls Sie jedoch etwas an der roten Pille schlecken wollen, dann arbeiten Sie durch nachfolgenden, herausfordenden Text.

Prolog: Die Vervollständigung

Wir erinnern an die Konstruktion von $\mathbb{R}$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$. Auch erinnern wir an die Konstruktion der Regelfunktionen $\mathcal{R}(I)$ als Vervollständigung der Treppenfunktionen $\mathcal{T}(I)$ auf einem beschränkten Intervall I. Letzteres Beispiel fällt in folgende Kategorie: Angenommen (X,d) ist ein vollständiger Raum, etwa $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ der Raum der beschränkten Funktionen, und $A \subset X$ ist eine Teilmenge, etwa $\mathcal{T}(I) \subset \mathcal{B}(I)$, dann ist der Abschluß $\overline{A}$ von A die Vervollständigung von A. Weiter kann man gleichmäßig stetige Funktionen $f : A \to Y$ in einen vollständigen Raum Y (gleichmäßig) stetig zu einer Funktion $\overline{f} : \overline{A} \to Y$ fortsetzen: Ist $x \in \overline{A}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, so ist wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y, damit konvergent in Y (da Y vollständig), und der Grenzwert $\overline{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ ist unabhängig von der Wahl von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Wir hatten dieses Prinzip benutzt, um die Fortsetzung des Integrals

$$\mathcal{I} : \mathcal{T}(I) \to \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \int_I \phi(x)\, dx$$

auf die Regelfunktionen $\mathcal{R}(I)$ zu definieren.

Ganz allgemein können wir uns nun fragen, ob es denn nicht möglich sei einen allgemeinen metrischen Raum (X,d) zu vervollständigen. Hier ist die Konstruktion: Wir betrachten zuerst den Raum der Cauchy-Folgen in X

$$\mathcal{C}(X) := \{\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \mid \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m,n \ge N : \quad d(x_n, x_m) < \epsilon\}$$

und erklären eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}(X)$ durch

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \quad :\Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0\,.$$

Die Äquivalenzklasse von $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(X)$ bezeichnen wir mit $\overline{\mathbf{x}}$ und den Raum der Äquivalenzklassen mit $\overline{X} := \mathcal{C}(X)/\sim$.
Bearbeiten Sie nun folgende Aufgabenstellung:

1. Durch

$$\overline{d} : \overline{X} \times \overline{X} \to \mathbb{R}_{\ge 0}, \quad (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \to \overline{d}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}});\ d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

wird eine Metrik auf $\overline{X}$ erklärt. *Hinweis: Sie haben insbesondere zu zeigen, daß der Limes* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ *nicht von der Wahl der Repräsentanten* $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbf{x}}$ *und* $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbf{y}}$ *abhängt.*

2. Die Abbildung
$$\iota : X \to \overline{X}, \quad x \mapsto \overline{(x, x, x, \dots)}$$
ist isometrisch, d.h. $\overline{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

3. Das Bild von ι ist dicht, i.e. $\overline{\iota(X)} = \overline{X}$ (in leicht verwirrender Notation).

4. $\overline{X}$ ist vollständig. *Hinweis: Sei* $(\overline{\mathbf{x}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine C.F. in* $\overline{X}$ *und* $\mathbf{x}_n = (x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$. *Dann ist* $\mathbf{y} := (x_{nn})_{n\in\mathbb{N}}$ *eine C.F. in* X *und es gilt* $\lim_{n\to\infty} \overline{\mathbf{x}}_n = \overline{\mathbf{y}}$.

5. Sei $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung in einen vollständigen metrischen Raum Y. Dann besitzt f eine eindeutige Fortsetzung zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $\overline{f} : \overline{X} \to Y$; konkret:
$$\overline{f}(\overline{\mathbf{x}}) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)\,.$$

Wir haben nun folgenden Satz bewiesen:

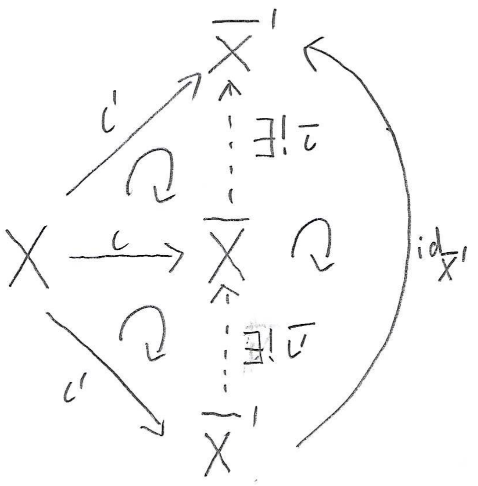
Satz. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum* $\overline{X}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Es existiert eine isometrische Abbildung* $\iota : X \to \overline{X}$ *mit dichtem Bild.*

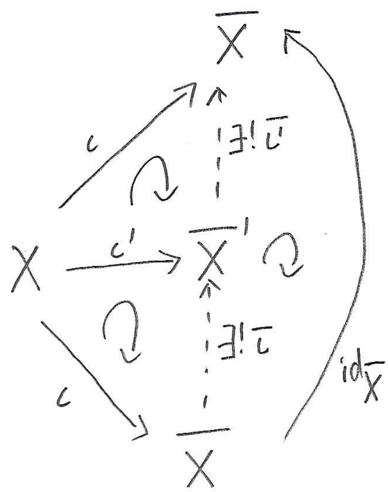
2. *Jede gleichmäßig stetige Abbildung* $f : X \to Y$ *in einen vollständigen metrischen Raum* Y *besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung* $\overline{f} : \overline{X} \to Y$.

Der Raum $\overline{X}$ *ist eindeutig im folgenden Sinn: Ist* $\overline{X}'$ *ein vollständiger Raum, versehen mit einer Einbettung* $\iota' : X \to \overline{X}'$, *welche* (1) *und* (2) *genügt, so sind* $\overline{X}$ *und* $\overline{X}'$ *isometrisch isomorph.*

Zum Verständnis der letztgenannten Eindeutigkeit meditieren Sie bitte über die folgende Diagramme:



$\bar\iota \circ \bar\iota' = \mathrm{id}_{\overline{X}'}$



$\bar\iota' \circ \bar\iota = \mathrm{id}_{\overline{X}}$

erhält man durch mehrfache Anwendung der universellen Eigenschaft

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \\ \overline{X} \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Bemerkung. Der Satz über die Vervollständigung kann noch etwas verschärft werden. Es genügt, daß (X, d) *halbmetrisch* ist, d.h. die Abstandsfunktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist symmetrisch (i.e. $d(x, y) = d(y, x)$), erfüllt die Δ-Ungleichung, und es gilt $d(x, x) = 0$ für alle $x \in X$. I.a.W. wir forden nicht mehr $x = y$, falls $d(x, y) = 0$. Die Vervollständigung eines halbmetrischen Raums via der gleichen Konstruktion liefert einen vollständigen <u>metrischen</u> Raum $\overline{X}$. Beispiel: Versehen wir eine Menge X mit der trivialen Halbmetrik, i.e $d(x, y) = 0$ für alle $x, y \in X$, so ist $\overline{X} = \{pt\}$ die einpunktige Menge.

Ganz analog zu einer Halbmetrik definiert man eine Halbnorm. Ein Beispiel für einen halbnormierten Raum ist $\mathcal{R}([a, b])$, versehen mit der Halbnorm

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx \qquad (f \in \mathcal{R}([a, b]))\,.$$

Man beachte, $\|\cdot\|_1$ ist wirklich nur eine Halbnorm und keine Norm, denn für jede endliche Teilmenge $\varnothing \neq J \subset [a, b]$ ist

$$\chi_J(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in J, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in [a, b])$$

eine Regelfunktion $0 \neq \chi_J \in \mathcal{R}([a, b])$ mit $\|\chi_J\|_1 = 0$. Die von $\|\cdot\|_1$ induzierte Halbmetrik ist $d_1(f, g) := \|f - g\|_1$. Der Integrationsoperator

$$\mathcal{I} : \mathcal{R}([a, b]) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx$$

erfüllt

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(g)| = |\mathcal{I}(f - g)| \leq d_1(f, g) \qquad (f, g \in \mathcal{R}([a, b]))\,,$$

ist demnach gleichmäßig stetig. Nach dem VV-Satz setzt sich $\mathcal{I}$ eindeutig auf die VV von $(\mathcal{R}([a, b]), d_1)$ fort. Diese VV wird üblich mit $L^1([a, b])$ bezeichnet und ist der Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen. A priori ist allerdings an dieser Stelle überhaupt nicht klar, daß die abstrakte VV $\overline{\mathcal{R}([a,b])} = L^1([a,b])$ aus "Funktionen" irgendeiner Art bestehen soll. Das wird sich erst im nächsten Semseter befriedigend klären lassen, wenn wir die Maßtheorie in Angriff nehmen.

Intermezzo: Das Riemann-Lebesgue Lemma

Sei I ein beschränktes Intervall und $f \in \mathcal{R}(I)$ eine komplexwertige Regelfunktion. Wir fassen f als Funktion auf $\mathbb{R}$ auf, indem wir sie außerhalb von I mit Null fortsetzen. Wir definieren die *Fouriertransformation* von f als

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \xi \mapsto \widehat{f}(\xi); \ \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi} \, dx \, .$$

Physikalisch gesehen beschreibt $\widehat{f}(\xi)$ den Wellenteil von f in Bezug auf die Welle $e^{-ix\xi}$ mit Frequenz $\xi \in \mathbb{R}$.
Als eine weitere Anwendung des VV-Satzes beweisen wir nun das:

Satz.(Riemann-Lebesgue Lemma) *Für jedes beschränkte Intervall I und $f \in \mathcal{R}(I)$ gilt*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0 \, .$$

Mit ein paar neuen Begriffen wird der Beweis zum Klacks. Zuerst definieren den Raum der stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden:

$$C_0(\mathbb{R}) := \{ f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \} \, .$$

Aufgabe. $(C_0(\mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ ist ein Banachraum.

Jetzt machen wir eine kleine Rechnung für $f = \chi_{[a,b]}$, die uns $\widehat{\chi}_{[a,b]} \in C_0(\mathbb{R})$ beweist:

$$\widehat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = \int_a^b e^{ix\xi} \, dx = \frac{e^{ib\xi} - e^{ia\xi}}{\xi} \, .$$

Damit ist auch $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ für jede Treppenfunktion f, etwas formaler:

$$\mathcal{F} : \mathcal{T}(I) \to C_0(\mathbb{R}), \quad \xi \mapsto \widehat{f}(\xi) \tag{1}$$

ist eine lineare Abbildung. Weiter ist $\mathcal{F}$ stetig, da

$$\| \mathcal{F}(f) \|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} | \widehat{f}(\xi) | \le |I| \cdot \| f \|_\infty \, .$$

Nach dem VV-Satz setzt sich $\mathcal{F}$ eindeutig zu einer stetigen linearen Abbildung

$$\mathcal{R}(I) \to C_0(\mathbb{R}), \quad f \mapsto \widehat{f}$$

fort, eben die Aussage des RL-Lemmas.

Bemerkung. *Versehen wir $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ mit der L^1-Halbnorm $\| f \|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx$, so gilt auch*

$$\| \mathcal{F}(f) \|_\infty \le \| f \|_1 \, .$$

Nach dem VV-Satz setzt sich die Fouriertransforamtion zu einer Abbildung $L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ fort, die übliche Formulierung des RL-Lemmas.

Andante: Regelfunktionen in mehreren Variablen
- ein Begriff von bedingtem Wert -

Für ein beschränktes Intervall I[1] erklärten wir den Raum der Regelfunktionen $\mathcal{R}(I)$ als den Abschluß der Treppenfunktionen $\mathcal{T}(I)$ in dem Banachraum $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$. Die Verallgemeinerung von einem beschränkten Intervall I für den $\mathbb{R}^n$ ist ein Produkt von beschränkten Intervallen $Q := I_1 \times \ldots \times I_n$. Man nennt Q einen *Quader*. Ist der Quader Q nicht leer, so ist Q offen/ kompakt genau dann wenn alle Intervalle I_j offen/kompakt sind. Das *Volumen* eines Quaders $Q = \prod_{j=1}^n I_j$ wir definiert als

$$|Q| := \mathrm{vol}(Q) := \prod_{j=1}^n |I_j| \,.$$

Ist Q ein Quader, so bezeichnen wir mit

$$\chi_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in Q, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

seine *charakteristische Funktion*, manchmal auch als Indikatorfunktion bezeichnet. Sei

$$\mathcal{Q} := \{Q \subset \mathbb{R}^n \mid Q \ \text{ ist ein Quader}\}$$

die Menge aller Quader. Sei $Q \in \mathcal{Q}$. Dann definieren wir die Treppenfunktionen auf Q als

$$\mathcal{T}(Q) = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \chi_{Q_i} \mid n \in \mathbb{N}, \ c_i \in \mathbb{R}, \ Q_i \in \mathcal{Q}, \ Q_i \subset Q \right\} .$$

Ganz analog zum Fall $n = 1$ erhalten wir ohne großes Pipapo:

- $\mathcal{T}(Q)$ ist ein Vektorraum.
- Die Vorschrift
$$\mathcal{I} : \mathcal{T}(Q) \to \mathbb{R}, \quad f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{Q_i} \mapsto \sum_{i=1}^n c_i |Q_i|$$
ist definiert, linear und monoton, i.e. aus $f \le g$ folgt $\mathcal{I}(f) \le \mathcal{I}(g)$.
- Der Integrationsoperator ist stetig; etwas genauer, es gilt:
$$|\mathcal{I}(f)| \le |Q| \cdot \|f\|_\infty \qquad (f \in \mathcal{T}(Q)) \,. \tag{2}$$

Für den Nachweis der Monotonie und auch von (2) benutzen wir, daß jedes $f \in \mathcal{T}(Q)$ eine Darstellung $f = \sum c_i \chi_{Q_i}$ besitzt mit $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ für $i \ne j$.
In vollständiger Analogie zum Fall $n = 1$ definieren wir die Regelfunktionen

$$\mathcal{R}(Q) := \overline{\mathcal{T}(Q)}^{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$$

als den Abschluß im Banachraum der beschränkten Funktionen $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. Für jedes $f \in \mathcal{R}(Q)$ finden wir nun eine Folge f_n von Treppenfunktionen mit $f_n \to f$ gleichmäßig und (2) erlaubt uns die Definition eines Integrals

[1] Ein Intervall ist beschränkt, falls $\sup I$ und $\inf I$ in $\mathbb{R}$ existieren; $|I| = \sup I - \inf I$ nannten wir die Länge des Intervalls. Zur Erinnerung:

$$|(a,b)| = |[a,b)| = |(a,b]| = |[a,b]| = b - a \,.$$

$$\mathcal{I}(f) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(f_n)\,.$$

Via dem VV-Satz ist $\mathcal{I}$ in der Tat definiert ist, i.e. unabhängig von der Wahl der Folge $(f_n)_n$, und man erhält, daß der Integrationsoperator

$$\mathcal{I} : \mathcal{R}(Q) \to \mathbb{R}$$

linear, monoton und stetig ist (die Ungleichung (2) weitet sich auf $\mathcal{R}(Q)$ aus). Das Regelintegral rechnet sich wie folgt aus:

Satz/Definition. *Sei $Q = \prod_{j=1}^n I_j \in \mathcal{Q}$ und $f \in \mathcal{R}(Q)$. Dann gilt für jede Permutation $\sigma \in S_n$*

$$\mathcal{I}(f) = \int_{I_{\sigma(1)}} \left(\int_{I_{\sigma(2)}} \left(\dots \int_{I_{\sigma(n)}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\ dx_{\sigma(n)} \right)\ dx_{\sigma(n-1)} \right) \dots dx_{\sigma(1)} \tag{3}$$

für all $f \in \mathcal{R}(Q)$. Speziell für $n = 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f) &= \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x_1, x_2)\ dx_2 \right)\ dx_1 \\ &= \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x_1, x_2)\ dx_1 \right)\ dx_2\,. \end{aligned}$$

Weitere Bezeichnungen für $\mathcal{I}(f)$

$$\int_Q f(x)\ dx\,, \quad \int_Q f\,, \quad \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n)\ dx_1\ dx_2 \dots\ dx_n\,.$$

Beweis. Wir bezeichnen die rechte Seite von (3) mit $\mathcal{J}(f)$. Zuerst zeigen wir, daß $\mathcal{J}(f)$ in der Tat definiert ist. Sei dazu $1 \le j \le n$ fixiert und x_i, $i \ne j$, fest. Die Zuordnung $x_j \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ ist eine Regelfunktion auf $\mathcal{R}(I_j)$ (weshalb?). Damit ist die Zuordnung in einer Variable weniger

$$(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \mapsto \int_{I_j} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\ dx_j$$

existent und stellt wieder eine Regelfunktion dar (warum?). Iterativ erhalten wir nun, daß $\mathcal{J}(f)$ definiert ist.
Zu zeigen ist $\mathcal{I}(f) = \mathcal{J}(f)$ für alle $f \in \mathcal{R}(Q)$. Wir zeigen dies zuerst für Treppenfunktionen. Da $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ beide linear sind, genügt es $\mathcal{I}(\chi_{Q'}) = \mathcal{J}(\chi_{Q'})$ für alle Quader $Q' \subset Q$ nachzuweisen. Mit $Q' = \prod_{j=1} I'_j$ ergibt ein stupender Einzeiler: $\mathcal{J}(\chi_{Q'}) = \prod_{j=1}^n |I'_j| = \mathcal{I}(\chi_{Q'})$.
Sei nun $f \in \mathcal{R}(Q)$ und f_k eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ gleichmäßig. Per Definition gilt $\mathcal{I}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(f_n)$. Iterativ vertauschen wir Limes und Integral mit [M, Satz 8.19] (offensichtlich auch für Regelfunktionen gültig) und schließen den Beweis. □

Der Träger. Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir den *Träger* von f als die folgende abgeschlossene Teilmenge

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ne 0\}}\,.$$

Aufgabe. *Ist $f(x) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\le k}} c_\alpha x^\alpha$ nicht das Nullpolynom, so ist $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^n$.*

Wir setzen

$$C_c(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid\ \operatorname{supp} f\ \text{ ist kompakt}\}$$

und

$$C_c(Q) = \{f \in C_c(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} f \subset Q\}$$

Man beachte $C_c(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} C_c(Q)$. Auch wert anzumerken: Ist das Innere Q^0 von Q leer, so gilt $C_c(Q) = \{0\}$.

Diskussion des Regelintegrals. Wir wollen die Frage beantworten, ob der Raum $\mathcal{R}(Q)$ alle "wichtigen" Funktionen enthält. Positiv zu vermerken ist

Lemma. *Für alle $Q \in \mathcal{Q}$ gilt $C_c(Q) \subset \mathcal{R}(Q)$.*

Beweis. Sei $K := \operatorname{supp} f \subset Q$ und $\epsilon > 0$. Da f stetig ist, gibt es zu jedem $x \in K$ einen offenen Quader $Q_x \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in Q_x$ und $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $y \in Q_x$. Die offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{x \in Q} Q_x$ hat dann aufgrund der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung, sagen wir $K \subset \bigcup_{j=1}^m Q_{x_j}$. Im nächsten Schritt machen wir die Q_{x_j} disjunkt und setzen $Q_1 := Q_{x_1}$ und allgemein $Q_{n+1} := Q_{x_n} \setminus \bigcup_{j=1}^n Q_{x_j}$. Wir definieren nun eine Treppenfunktion

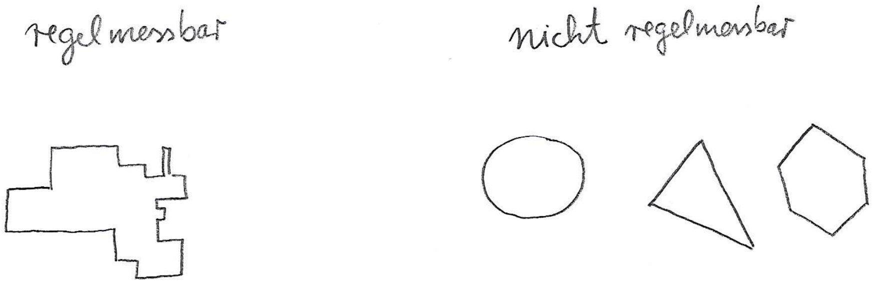
$$t(x) := \sum_{j=1}^m f(x_j) \chi_{Q_j \cap Q}(x)$$

und sehen sofort $\|t - f\|_\infty < \epsilon$. Somit erhalten wir eine Folge von Treppenfunktionen t_n mit $\lim_{n\to\infty} t_n = f$ gleichmässig, i.e. $f \in \mathcal{R}(Q)$. □

Wir nennen eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ *regelmessbar* oder *rechteckig*, falls $\chi_E \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{R}(Q)$. Ist das der Fall, so erhalten wir einen natürlichen Volumenbegriff für regelmessbare Mengen, nämlich:

$$|E| := \operatorname{vol}(E) = \int \chi_E$$

Aufgabe. Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann regelmessbar, wenn E eine endliche Vereinigung von Quadern ist. Insbesondere ist für $n \geq 2$ keine Kugel $B_r(p) \subset \mathbb{R}^n$ mit $r > 0$ regelmessbar. Selbst ein Dreieck $D \subset \mathbb{R}^2$ ist nicht regelmessbar!



Somit erkennen Sie den gravierenden Nachteil:

Für $n \geq 2$ ist das Volumen der Kugel nicht bestimmbar im Regelkontext.

Um das zu können, müssen wir den Begriff einer Treppenfunktion etwas verallgemeinern und auch "runde" Stufen zulassen.

Bemerkung. Die Kugel hat es in sich: *Elf Eigenschaften der Kugel*, eine Vorlesung von David Hilbert[2] , zu finden als §32 in dem Werk Anschauliche Geometrie.

Crescendo: Einschachtelbare Mengen

Dieser Abschnitt ist relativ steil geschrieben, d.h. ich unterdrücke einige, letzlich aber nicht relevante, Kleinigkeiten. Versuchen Sie den Text eher intuitiv zu lesen, um die Essenz des Ganzen zu ergattern. *Fliegen Sie mit!*

Wir nennen eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ *einschachtelbar* oder *Jordan-meßbar*, falls für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Familie von Quadern $(Q_j)_{j\in J}$ und ein $I \subset J$ existiert mit:

- $\bigcup_{i\in I} Q_i \subset E \subset \bigcup_{j\in J} Q_j$,
- $\sum_{j\in J} |Q_j| - \sum_{i\in I} |Q_i| < \epsilon$.

Einer einschachtelbaren Menge E können wir ein Volumen zuordnen:

$$|E| = \inf\{\sum_{j\in J} |Q_j| \mid Q_j \in \mathcal{Q}, |J| < \infty\}\,.$$

Aufgabe. (a) Ist E einschachtelbar, so auch E^0 und $\overline{E}$ und es gilt:

$$|E| = |\overline{E}| = |E^0|\,.$$

(b) Sind E und F einschachtelbar, so auch $E \cap F$, $E \cup F$ und $E \setminus F$.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}$ die Menge aller einschachtelbaren Mengen und erweitern unsere Vorstellung von Treppenfunktionen:

$$\mathcal{T}_e(Q) = \{\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} \mid E_i \subset Q, E_i \in \mathcal{E}\}\,.$$

Mit obiger Aufgabe sehen wir dann gleich, daß das Integral

[2] Einstein an Hilbert anlässlich des 60. Geburtstags von Hilbert, datiert am 18.1.1922.

Sehr verehrter Herr Kollege!

Ich war schon ganz fest entschlossen, Ihnen meine herzlichen Glückwünsche zu dem Lebensabschnitt persönlich darzubringen. Aber nun gehts absolut nicht weil ich nicht abkommen kann. Nur ein Zipfel Ihres gewaltigen Lebenswerkes kann ich Beschränkterer (und Fauler) überschauen, aber gerade genug, um das Format Ihres schaffenden Geistes zu ahnen. Dazu den Humor und den sicheren, selbständigen Blick in alle Dinge und - einen harten Schädel wie kein zweiter nebst zwei starken Armen, um von Zeit zu Zeit den Fakultätsstall auszumisten. Ich wünsche Ihnen von Herzen, dass Sie das grosse Kunstwerk, zu dem Sie Ihr Leben gestaltet haben, mit Kraft und frohem Mut weiter führen und vollenden sollen, mit der Freude und Leichtigkeit, mit der Sie es bisher getrieben. Amen.

Sie und Ihre Frau grüsst herzlich
Ihr A. Einstein

Anmerkung hierzu: Die Ausmistung des hiesigen Augiasstalls ist nur noch theoretisch möglich.

$$\mathcal{I} : \mathcal{T}_e(Q) \to \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j} \mapsto \sum_{j=1}^{n} c_j |E_j|$$

definiert, linear, monoton und beschränkt ist, i.e. es gilt $|\mathcal{I}(f)| \le |Q| \cdot \|f\|_\infty$. Wir setzen

$$\mathcal{R}_e(Q) := \overline{\mathcal{T}_e(Q)}^{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$$

Damit landen wir bei einem vernünftigem Integralbegriff für die erweiterten Regelfunktionen

$$\mathcal{I} : \mathcal{R}_e(Q) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_Q f(x)\ dx\,,$$

welcher für alle Zwecke der Anwendung ausreicht. Warum das so ist, besagt der folgende Satz:

Abbildungssatz für Einschachtelungen (AE-Satz). *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann bildet F einschachtelbare Mengen auf einschachtelbare Mengen ab: Ist $E \in \mathcal{E}$ mit $\overline{E} \subset U$, so ist $F(E) \in \mathcal{E}$.*

Bevor wir zum Beweis schreiten einige

Beispiele. (a) (Die Scheibe) Wir betrachten den Diffeomorphismus (Polarkoordinaten auf der Ebene)

$$F : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\ge 0}\mathbf{e}_1, \quad (r,\phi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}.$$

Für jedes $0 < \epsilon < 2\pi$ ist mit $Q_\epsilon := [\epsilon, 1] \times [\epsilon, 2\pi - \epsilon] \subset U$ ein Quader im Definitionsbereich gegeben. Nach dem AE-Satz ist $K_\epsilon := F(Q_\epsilon)$ einschachtelbar. Was geschieht im Limes für $\epsilon \to 0$? Wie könnten wir formal zeigen, daß die Scheibe $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \le 1\}$ einschachtelbar ist? In den Übungen werden wir allgemein Polarkoordinaten für $\mathbb{R}^n$ einführen und die Einschachtelbarkeit der Kugeln beweisen - die *nullte* Eigenschaft der Kugel.
(b) (Das Parallelotop) Unter einem Parallelotop versteht man das Bild eines (abgeschlossenen) Quaders Q unter einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Eine kleine Vorüberlegung: Bildet eine Abbildung Quader auf einschachtelbare Mengen ab, dann auch Einschachtelbares auf ebensolches. Wir zerlegen die Matrix $A = A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$ mit jedem A_j entweder eine Diagonalmatrix oder eine Scherung $S = \mathbf{1} + xE_{ij}$ für $i \ne j$ und $x \in \mathbb{R}$. Wir müssen nur zeigen, daß jedes A_j Quader auf etwas Einschachtelbares abbildet. Für $A_j = D$ eine Diagonalmatrix ist dies klar, da D Quader auf Quader schickt. Sei also $A_j = S$ eine Scherung wie oben beschrieben. Sei $E := \bigoplus_{k \ne i,i} \mathbb{R}\mathbf{e}_k$. Dann gilt $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$ mit $E^\perp = \mathbb{R}\mathbf{e}_i \oplus \mathbb{R}\mathbf{e_j}$ und S erhält E und $E^\perp$. Dies reduziert die Aussage auf $n = 2$ und hier ist es hoffentlich klar: Man zerlege ein Parallelogramm in 4 rechtwinklige Dreiecke und verwende Riemannsche Ober - und Untersummen für die Bestimmung der Fläche unter dem Graphen einer Funktion $f(x) = \alpha x$ auf $I = [0, b]$ mit $\alpha \ge 0$.
Aus der Tatsache, daß Scherungen volumenerhaltend und die Determinante multiplikativ ist, bekommen wir auch

$$|A(Q)| = |\det A| \cdot |Q|$$

für alle Quader Q.

Beweis. Der Beweis ist wenig elegant und bedient sich *der* `Idee` der Numerik. Es genügt zu zeigen, daß F Quader Q auf einschachtelbares $F(Q)$ schickt. O.E. sei $Q = [0,1]^n$. Sei $N \in \mathbb{N}$. Wir `zerhacken` Q in 2^{nN} kleinere halbabgeschlossene Würfel entlang des Gitters $2^{-N}\mathbb{Z}^n$, i.e. mit $p_1,\dots,p_{2^{nN}}$ zählen wir die Gitterpunkte in Q auf, welche nicht im oberen rechten Rand erhalten sind (i.e. keine der Koordinaten von p_k is eins), und erhalten disjunkte Würfel

$$Q_k = p_k + [0, 2^{-N}[^n \,.$$

Es gilt gilt $Q = \bigcup_{k=1}^{2^{nN}} Q_k$ bis auf die Nullmenge des oberen rechten Randes. Mit Taylor erhalten wir für jedes k und $y \in Q_k$

$$F(y) = F(p_k) + dF(p_k)(y - p_k) + R_k(y)\,.$$

Da F von der Klasse C^1 ist, finden wir für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|R_k(y)\|_2 \le \epsilon\|y\|$ für $y \in Q_k$, und dies uniform für alle k, da Q kompakt und dF stetig ist. Sei $c := \sup_{y\in Q}\|dF(y)\|_{\mathrm{op}}^{-1} > 0$ und $A_k := dF(p_k)$. Wir landen bei der Einschachtelung

$$\underbrace{p_k + (1 - c\epsilon)A_k([0, 2^{-N}[^n)}_{=:P_k^-} \subset F(Q_k) \subset \underbrace{p_k + (1 + c\epsilon)A_k([0, 2^{-N}[^n)}_{:=P_k^+}\,.$$

Für die Volumendifferenz der translatierten Parallelotope gilt

$$|P_k^+| - |P_k^-| = [(1 + c\epsilon)^n - (1 - c\epsilon)^n]|\det A_k|2^{-Nn}\,.$$

Mit $C := \sup_{y\in Q}\|dF(y)\|_{\mathrm{op}}$ liefert Aufsummation

$$\sum_{k=1}^{2^{nN}} |P_k^+| - |P_k^-| \le C \cdot [(1 + c\epsilon)^n - (1 - c\epsilon)^n]$$

und damit die Einschachtelbarkeit von $F(Q)$. □

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so setzen wir $\mathcal{R}_e(U) := \bigcup_{\substack{Q\in\mathcal{Q}\\ \overline{Q}\subset U}} \mathcal{R}(Q)$ für den Raum der erweiterten Regelfunktionen auf U. Aus dem AE-Satz erhalten wir dann.

Proposition. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann sind das Zurückziehen (engl. pull back) und das Vorwärtsdrücken (engl. push forward)*

$$F^* : \mathcal{R}_e(V) \to \mathcal{R}_e(U), \quad F^*(\phi) := \phi \circ F$$
$$F_* : \mathcal{R}_e(U) \to \mathcal{R}_e(V), \quad F_*(\psi) := \psi \circ F^{-1}$$

lineare Isomorphismen. In anderen Worten, F^* und F_* schicken erweiterte Regelfunktionen auf ebensolche.

Bemerkung. (a) (Relevanz für die Trafo-Formel) Die Aussage der Proposition wird im nächsten Abschnitt relevant werden, wenn wir die Transformationsformel besprechen:

$$\int_V \phi(y)\; dy = \int_U \phi(F(x))|\det dF(x)|\; dx \qquad (\phi \in \mathcal{R}_e(V))$$

Soergel beweist diese im C_c-Kontext (stetige Funktionen mit kompaktem Träger) in [S2] und leitet daraus die Trafo-Formel in voller Allgemeinheit nach Abhandlung der Maßtheorie in [S3] ab. Der C_c- oder, etwas allgemeiner, der $\mathcal{R}$-Kontext ist aber etwas unbefriedigend, da die charakteristische Funktion einer Kugel $\chi_{B_r(p)}$ keine Regelfunktion ist und wir innerhalb dieser Theorie das Volumen der Kugel nicht berechnen könnten. Im erweiterten Regelkontext $\mathcal{R}_e$ geht die Sache auf.
Stetige Funktionen verhalten sich offensichtlich gut unter F^* und F_*, i.e. mit $\phi \in C_c(V)$ ist auch $F^*(\phi) \in C_c(U)$ und ebenso für F_*. Für die naiven Regelfunktionen

$\mathcal{R}(V)$, $\mathcal{R}(U)$ gilt das nicht: Polarkoordinaten gehen eben von eckig auf rund. Nach der Proposition ist das kein Problem im $\mathcal{R}_e$-Kontext.
(b) (Erste Schritte zur Lebesgue-Theorie) In Analysis 1 betrachteten wir die Dirichlet-Funktion für $I = [0,1]$

$$\chi : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in I \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und wir hatten uns schon überlegt, daß χ integrierbar sein sollte mit $\int \chi = 0$. Die Sache mit den (erweiterten) Regelfunktionen war die, daß wir nur gleichmässige Limiten von (erweiterten) Treppenfunktionen zugelassen haben. Damit können wir aber χ nicht konstruieren; mit monotonen Limiten allerdings schon. Sei $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ und $E_n \subset E$ eine aufsteigende Folge endlicher Teilmengen, i.e. $E_n \subset E_{n+1}$, die E ausschöpft, i.e. $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Setze $t_n := \chi_{E_n}$. Dann ist $t_n \in \mathcal{R}(I)$ und es gilt

$$\chi(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x) \qquad (x \in I)$$

d.h. χ ist punktweiser monotoner Limes von Treppenfunktionen. Jetzt würden wir gern

$$\int \chi(x)\ dx := \lim_{n\to\infty} \int t_n(x)\ dx$$

definieren. Dazu müssten wir aber zeigen, daß dies unabhängig von der Wahl der t_n's ist, und zwar in folgendem Sinn: ist $\chi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n$ irgendein monotoner Limes von Treppenfunktionen f_n, so ist der Limes $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\ dx$ nicht abhängig von der Wahl der Folge f_n. Das ist in diesem konkreten Fall nicht schwer zu zeigen.
Etwas allgemeiner betrachten wir Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, welche monotone punktweise Limiten von nicht-negativen Treppenfunktionen $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ sind. Wir bezeichnen diesen Kegel von Limiten mit $\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$. Die crux ist nun, daß für $f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ der Ausdruck

$$\mathcal{I}(f) := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\ dx \in [0,\infty]$$

definiert ist, d.h. unabhängig von der spezifischen Wahl des monotonen Limes $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ist. So schwer ist das nicht zu zeigen, nur etwas erweiterte Buchhaltung im Kontext von Heine-Borel - es genügt $\operatorname{supp} f$ kompakt zu betrachten. Arbeitet man dies weiter aus, kommt man schnell und effizient zu den Hauptresultaten der Lebesgueschen Theorie für den $\mathbb{R}^n$. Allerdings verschleiert man damit das Wesen der Sache, das *Maß* - unser erstes großes Thema im nächsten Semester.

Finale: Die Transformationsformel

Zum krönenden Abschluß schalten wir wie gewöhnlich nach Freiburg und übergeben das Wort an Soergel mit [S2, §4.1], versehen mit dem Vermerk, daß die Trafo-Formel auch im erweiterten Regelkontext gilt.

Aufgabe. Für jedes $f \in \mathcal{R}_e(\mathbb{R}^2)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\ dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r\cos\phi, r\sin\phi)\ r dr\ d\phi;$$

insbesondere

$$|B_r(p)| = r^2\pi \qquad (p \in \mathbb{R}^2, r > 0)$$

für jede Scheibe im $\mathbb{R}^2$.

Epilog

Unser Grab erwärmt der Ruhm.
Torenworte! Narrentum!
Eine beßre Wärme gibt
Eine Kuhmagd, die verliebt
Uns mit dicken Lippen küßt
Und beträchtlich riecht nach Mist.
Gleichfalls eine beßre Wärme
Wärmt dem Menschen die Gedärme,
Wenn er Glühwein trinkt und Punsch
Oder Grog nach Herzenswunsch
In den niedrigsten Spelunken,
Unter Dieben und Halunken,
Die dem Galgen sind entlaufen,
Aber leben, atmen, schnaufen,
Und beneidenswerter sind,
Als der Thetis großes Kind -
Der Pelide sprach mit Recht:
Leben wie der ärmste Knecht
In der Oberwelt ist besser,
Als am stygischen Gewässer
Schattenführer sein, ein Heros,
Den besungen selbst Homeros.

Heinrich Heine