Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

11. Anleitung zum Selbststudium

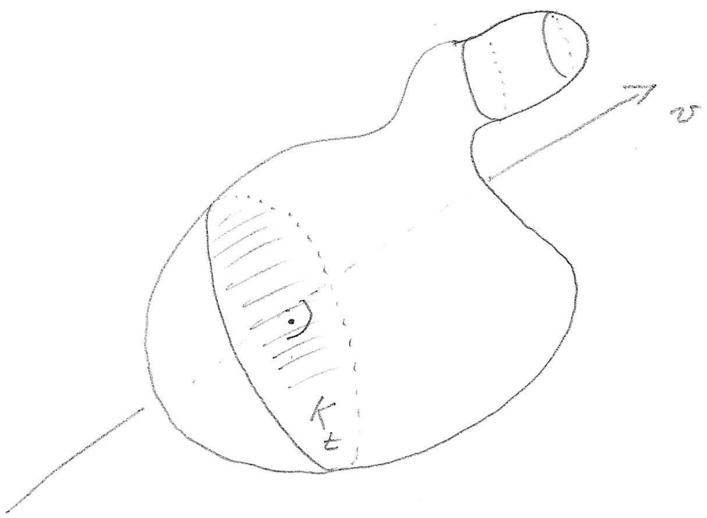
(KW27)

Die Themen der Woche sind: Volumenbestimmung nach Cavalieri sowie Integrationstheorie über Untermannigfaltigkeiten (Flächenintegral), [S2, §4.2].

Volumenbestimmung nach Cavalieri

Eine einschachtelbare Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ sei fortan als *Körper* benannt und mit dem Symbol K bezeichnet.
Man beachte, daß in unserer Terminologie ein Körper K stets von endlich vielen Quadern überdeckt werden kann, insbesondere K beschränkt ist. Wir geben uns eine Einheitsrichtung $v \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ vor und durchdringen K in Richtung v mittels planarer Schnitte

$$K_t := \{x \in K \mid \langle x, v\rangle = t\} \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$



Sei $K \neq \varnothing$. Da K beschränkt ist, existieren $a := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid K_t \neq \varnothing\}$ und $b := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid K_t \neq \varnothing\}$; weiter, K ist disjunkte Vereiningung seiner Schnitte $K = \bigcup_{a \le t \le b} K_t$. Sei $F := v^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp v\}$ der Normalenraum zu v und beachte: Für beliebiges $x_t \in K_t$ ist $K_t - x_t \subset F$. Gleich werden wir sehen, daß $K_t - x_t \subset F$ einschachtelbar ist. Damit ist

$$\mathrm{vol}_F(K_t) := \mathrm{vol}_F(K_t - x_t)\,.$$

existent und wegen der Translationsinvarianz des Volumens einschachtelbarer Mengen auch definiert, i.e. unabhängig von der Wahl von x_t. Wir kommen zum

Prinzip von Cavalieri. *Sei* $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ *ein Körper und* $v \in \mathbf{S}^{n-1}$ *eine fest vorgegebene Richtung. Sei* $F := v^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp v\}$ *der Normalenraum zu* v*. Dann ist für jedes* $t \in \mathbb{R}$ *der Schnitt* K_t *einschachtelbar in* F*, i.e.* $K_t - x_t \subset F$ *ist einschachtelbar für beliebiges, aber festes* $x_t \in K_t$*, und es gilt*

$$\mathrm{vol}_n(K) = \int_a^b \mathrm{vol}_F(K_t)\ dt\,. \tag{C}$$

Beweis. Nach dem AE-Satz bilden Diffeomorphismen Körper auf Körper ab. Nun ist jede Drehung $A \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ ein Diffeomorphismus. Dies erlaubt es uns $\mathbf{v} = \mathbf{e}_n$ anzunehmen. Damit ist $F = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Sei $K = Q := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ zuerst ein Quader. Dann ist $Q_t = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{t\}$ ein affiner Quader. und wir erhalten $\mathrm{vol}_F(Q_t) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_{n-1} - a_{n-1})$; auch (C) ist schnell für $K = Q$ verifiziert. Mit Q gilt dann auch (C) für eine endliche Vereinigung von Quadern. Nach der Definition der Einschachtelbarkeit ersieht man es dann auch schnell für alle einschachtelbaren Mengen nebst der Einschachtelbarkeit der Schnitte K_t. $\square$

Für die wichtigsten Anwendungen genügt das Kriterium aus der nachfolgenden

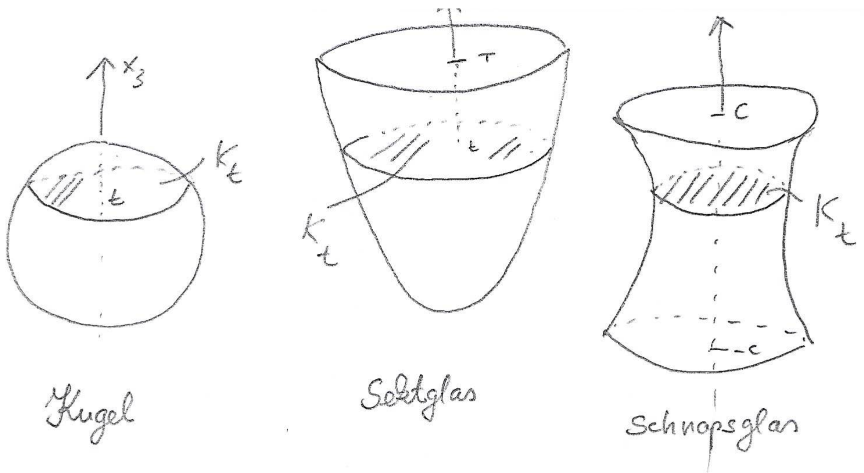
Aufgabe. *Sei* $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ *eine Hölder-Norm auf dem* $\mathbb{R}^{n-1}$, $1 \leq p \leq \infty$*, und* $g : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *eine stetige Funktion. Dann ist*

$$K = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x_n \leq b; \|x'\| \leq g(x_n)\}$$

einschachtelbar.

Beispiele. (a) (**Die Kugel**) Gehen wir durch $K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ längs der x_3-Achse, so sind die Schnitte K_t Scheiben mit Radius $\sqrt{1-t^2}$. Somit $\mathrm{vol}_2(K_t) = (1-t^2)\pi$ und nach Cavalieri

$$\mathrm{vol}_3(K_t) = \int_{-1}^1 (1-t^2)\pi\ dt = 2\pi(1 - \frac{1}{3}) = \frac{4\pi}{3}\,.$$



(b) (**Das Sektglas - für die Damen**) Gegeben sei ein gekapptes Vollparaboloid

$$K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_3 \leq T;\ x_1^2 + x_2^2 \leq x_3\}\,.$$

Die Schnitte entlang der x_3-Achse sind Scheiben vom Radius $\sqrt{t}$; demnach

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_0^T t\pi \; dt = \frac{1}{2}T^2\pi \,.$$

Praktischer Hinweis: Wenn beim gemeinsamen Fröhlichsein[1] die Gläser knapp und Sie sich womöglich eines mit einer aus dem anderen Lager teilen müssen, so teilen Sie als schlaue Mathematikerin großzügig im Verhältnis 1 : 3, d.h. Sie überlassen Ihrem Gegenüber die unteren zwei Drittel und belassen sie im braven Glauben des scheinbaren Vorteils. Tipp: Die feine Linie zieht man mit einem Lippenstift von Chanel.

(c) (**Das Schnapsglas - für die Herren**) Sei K ein symmetrisches Stück aus dem Inneren des einschaligen Hyperboloids

$$K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -c \le x_3 \le c; x_1^2 + x_2^2 \le 1 + x_3^2\} \,.$$

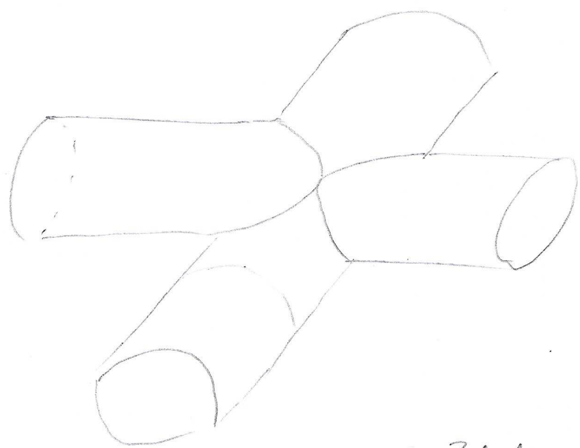
Die Vertikalschnitte K_t für $-c \le t \le c$ sind Scheiben vom Radius $\sqrt{1+t^2}$ und mit Cavalieri berechnet sich das Volumen zu

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_{-c}^{c} (1+t^2)\pi \; dt = 2\pi c(1 + \frac{c^2}{3}) \,.$$

Praktischer Hinweis: Trinken Sie lieber Bier; verwertbares Hochprozentiges ist mittlerweile sehr teuer.

(d) (**Durchdringende Zylinder**) Schnitte von mehreren Zylindern werden in Nordamerika als Steinmetz-Körper bezeichnet. Wir betrachten das Beispiel $K = K_1 \cap K_2$ von zwei sich orthogonal durchdringenden Vollzylindern mit gleichem Radius

$$K_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \le 1\}$$
$$K_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \le 1\}$$



Sich durchdringende Zylinder

Wir gehen durch K vertikal, i.e. entlang der z-Achse, und erkennen die Schnitte als Quadrate $K_t = [-\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1-t^2}] \times [-\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1-t^2}]$, $-1 \le t \le 1$. Somit $|K_t| = 4(1-t^2)$ und

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_{-1}^{1} 4(1-t^2) \; dt = 4(t - \frac{t^3}{3})\Big|_{t=-1}^{1} = \frac{16}{3} \,.$$

[1] Für die Sekretärinnen des Hauses ein periodisches wiederkehrendes Ritual.

Lineare Algebra: Das Volumen der Parallelotope

Sei E ein Euklidischer Raum, d.h. E ist ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum versehen mit einem positiv definiten Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Standardbeispiele von Euklidischen Räumen sind Unterräume $E\subset\mathbb{R}^n$, versehen mit der Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E.
Sei eine (geordnete) Menge $\mathbf{v}=\{v_1,\dots,v_k\}$ von k Vektoren in einem Euklidischen Raum E gegeben. Dazu bilden wir die symmetrische $k\times k$-Matrix (*Gramsche Matrix*):

$$G_{\mathbf{v}} := \left(\langle v_i,v_j\rangle\right)_{1\le i,j\le k}\,.$$

Lemma. *Die Matrix $G_{\mathbf{v}}$ ist positiv semi-definit, i.e. $\langle G_{\mathbf{v}}x,x\rangle\ge 0$ für alle $x\in\mathbb{R}^k$. Sind weiter $v_1,\dots,v_k$ linear unabhängig, so ist $G_{\mathbf{v}}$ positiv definit.*

Beweis. Zur Vermeidung etwaiger Konfusion bezeichnen wir das Skalarprodukt auf E mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ und das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^k$ mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{st}}$. Sei nun $x\in\mathbb{R}^k$. Dann

$$\begin{aligned}\langle G_{\mathbf{v}}x,x\rangle_{\mathrm{st}} &= \sum_{i,j=1}^{k}(G_{\mathbf{v}})_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{k}\langle v_i,v_j\rangle_E x_ix_j=\langle\sum_{j=1}^{k}x_jv_j,\sum_{i=1}^{k}x_iv_i\rangle_E\\ &= \langle y,y\rangle_E\ge 0\end{aligned}$$

mit $y=\sum_{j=1}^k x_jv_j\in E$. Sind weiter $v_1,\dots,v_k$ linear unabhängig, so ist $y=0$ genau dann, wenn $x=0$. Damit sind alle Aussagen des Lemmas evident. □

Sei $n:=\dim E$ und von nun an $k\le n$ mit $v_1,\dots,v_k$ linear unabhängig. Weiter sei

$$P_{\mathbf{v}}=\left\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_jv_j\mid\lambda_j\in[0,1]\right\}\subset E$$

das von $\mathbf{v}$ erzeugte Parallelotop in E. Man beachte $F=F_{\mathbf{v}}=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{v_1,\dots,v_k\}$ ist ein k-dimensionaler Unterraum von E, in dem $P_{\mathbf{v}}$ erzeugend liegt. Wir versehen F mit der von E induzierten Euklidischen Struktur. Was ist nun das (relative) Volumen von $P_{\mathbf{v}}$ in F?
Behelfsweise sei $\mathcal{F}:=\{f_1,\dots,f_k\}$ eine ONB von F vermöge derer wir F isometrisch mit $\mathbb{R}^k$ identifizieren:

$$\mathbb{R}^k\to F,\quad x\mapsto\sum_{j=1}^{k}x_jf_j$$

Vermöge dieser Identifikation entspricht $P_{\mathbf{v}}$ nun $B(\square)$ mit $\square=[0,1]^k$ und $B\in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$B=[[v_1]_{\mathcal{F}},\dots,[v_k]_{\mathcal{F}}]\,,$$

wobei $[v_i]_{\mathcal{F}}\in\mathbb{R}^k$ der Koordinatenvektor von v_i bezüglich $\mathcal{F}$ ist. Nun wissen wir vom letzten Blatt

$$\mathrm{vol}_k(B(\square))=|\det B|\cdot\mathrm{vol}_k(\square)=|\det B|\,.$$

Wegen $\det B=\det B^t$ können wir das nun auch als

$$\mathrm{vol}_k(B(\square))=\sqrt{\det(B^tB)}$$

umschreiben. Nun sind die Einträge von $A:=B^tB$ durch

$$g_{ij}:=\langle[v_i]_{\mathcal{F}},[v_j]_{\mathcal{F}}\rangle_{\mathrm{st}}$$

gegeben. Da aber die Identifikation $\mathbb{R}^k \simeq F$ isometrisch war, gilt

$$\langle [v]_{\mathcal{F}}, [w]_{\mathcal{F}} \rangle_{\mathrm{st}} = \langle v, w \rangle_F = \langle v, w \rangle_E$$

für alle $v, w \in F$. Damit bekommen wir

$$g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle_E$$

und dies ist nicht mehr abhängig von der ONB $\mathcal{F}$, sondern intrinsisch durch die Euklidische Struktur auf E gegeben. Wir fassen zusammen:

Lemma. *Seien $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängige Vektoren in einem Euklidischen Raum E. Dann gilt für das relative k-dimensionale Volumen des von $\mathbf{v}$ erzeugten Parallelotops*

$$\mathrm{vol}_k\, P_{\mathbf{v}} = \sqrt{\det\left(\langle v_i, v_j \rangle \right)_{1 \le i,j \le k}}\,.$$

Beispiel. Sei $E = \mathbb{R}^3$ und $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ zwei linear unabhängige Vektoren. Aus der Schule[2] wissen wir, daß das von v_1, v_2 im Raum aufgespannte Parallelogramm (Parallelotop) das Volumen $\|v_1 \times v_2\|$ hat und

$$\|v_1 \times v_2\|^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2$$

gilt. Andererseits ist

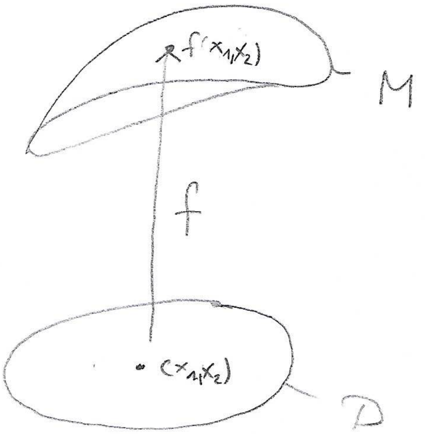
$$\det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix} = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2$$

und damit schließen Sie die Lücke zum Wohlvertrauten.

Wie man es dem Ingenieur erklärt: Integral über eine Fläche im $\mathbb{R}^3$

Mit die einfachsten Untermannigfaltigkeiten sind Flächen im $\mathbb{R}^3$, und noch etwas weiter vereinfacht die Hauben $\mathcal{G}_f$ als Graphen von Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ für $D \subset \mathbb{R}^2$ offen:

$$M = \mathcal{G}_f = \{ (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \mid x = (x_1, x_2) \in D \}\,.$$



[2]In NRW nur noch bedingt zutreffend und von der Qualität des Lehrers und dem Format der Schule abhängig.

Mit der Terminologie der *Karte* lässt sich also dieses $M = \mathcal{G}_f$ als das Bild einer einzigen Karte darstellen

$$\phi : D \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) .$$

Die Gramsche Matrix wird als

$$G(x) := d\phi(x)^T d\phi(x) \qquad (x \in D)$$

erklärt. Beachte

$$d\phi(x) = [\partial_1 \phi(x), \partial_2 \phi(x)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 f(x) & \partial_2 f(x) \end{pmatrix} .$$

Sei $g(x) := \sqrt{\det G(x)}$ die zugehörige *Gramsche Determinante*. Aus dem letzten Abschnitt über Parallelotope wissen wir, daß $g(x)$ das Volumen des Parallelogramms ist, welches von $\partial_1 \phi(x), \partial_2 \phi(x)$ aufgespannt wird. Mit

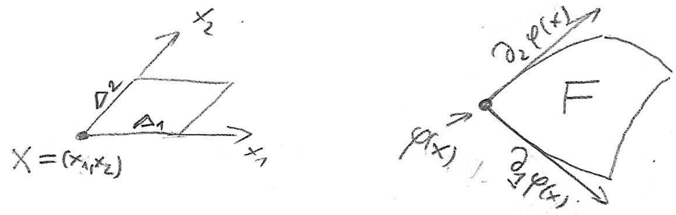
$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 + (\partial_1 f(x))^2 & \partial_1 f(x) \partial_2 f(x) \\ \partial_1 f(x) \partial_2 f(x) & 1 + (\partial_2 f(x))^2 \end{pmatrix}$$

errechnet sich

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{(1 + (\partial_1 f(x))^2 (1 + (\partial_2 f(x))^2 - [\partial_1 f(x) \partial_2 f(x)]^2} \\ &= \sqrt{1 + (\partial_1 f(x))^2 + (\partial_2 f(x))^2} . \end{aligned}$$

Rastern

Einzelnes Segment



$$|F| \approx \| \partial_1 \varphi(x) \times \partial_2 \varphi(x) \| \Delta_1 \cdot \Delta_2$$

Aufsummieren über das Raster liefert eine approximativen Wert für den Flächeninhalt, siehe [S2, §4.2, p. 92 mit Lemma 4.2.7]

$$\mathrm{vol}(M) \approx \sum_{i \in I} g(x_i)\Delta_1(x_i)\Delta_2(x_i)$$

mit $(x_i)_{i\in I}$ die linken unteren Ecken des Rasters I. Im Limes erhält man dann für den Flächenwert

$$\mathrm{vol}(M) = \int_D g(x_1, x_2)\ dx_1\ dx_2\,.$$

Aufgabe. *Berechnen Sie den Fächeninhalt der Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, indem Sie $\mathbb{S}^2$ in die obere und untere Hemisphäre zerschneiden und den Äquator als Nullmenge ignorieren. Das Ergebnis sollte aus der Schule bekannt sein.*

Etwas allgemeiner, sei $V \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von M und $f : V \to \mathbb{R}$ eine erweiterte Regelfunktion, i.e. $f \in \mathcal{R}_e(V)$. Dann erklären wir das Integral von f über M als

$$\int_M f := \int_D f(\phi(x))g(x)\ dx$$

mit $dx = dx_1 dx_2$.

Lesen Sie nun [S2, §4.2].