Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

2. Anleitung zum Selbststudium

(KW18)

Wir beginnen mit zwei Wiederholungen zu den Themen voriger Woche, i.e. [Fo2, §1]. Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Wiederholung: Topologische Räume

Unter einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ versteht man eine Menge X versehen mit einer Teilmenge $\mathcal{T}_X \subset \mathcal{P}(X)$, welche drei Axiome (Top1) - (Top3) erfüllt. Beantworten Sie nun folgende Fragen:

- Wie lauten die Axiome (Top1) - (Top3) ?
- Was versteht man unter der *diskreten*, was unter der *chaotischen Topologie* ?
- Was ist ein *Hausdorffscher* topologischer Raum?
- Was ist eine Umgebung?
- Man klassifiziere die Topologien auf $X = \{1, 2, 3\}$ und untersuche sie auf die Hausdorffeigenschaft. (Übungsblatt 2).

Die Antworten finden sich in [Fo2, §1], dem Material der letzten Woche. Es ist gängig nur von einem topologischen Raum X zu sprechen und in der Notation das zusätzliche $\mathcal{T}_X$ zu unterdrücken. Mit einer Teilmenge $A \subset X$ wurde der *Abschluß* $\overline{A}$, das *Innere* A° und der Rand $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$ erklärt. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

1. $\partial A \subsetneq \overline{A}$.
2. $\partial A = \partial A^\circ$.
3. $\partial A \neq A$.

Ein Tipp: Betrachten Sie $X = \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie und Teilmengen $A = \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$. War in der Tat wieder mal alles falsch?

Sei X eine Menge. Für eine Teilmenge $T \subset \mathcal{P}(X)$ sei $\mathsf{Top}(T) \subset \mathcal{P}(X)$ die kleinste Topologie, welche T umfasst. Ist T bereits eine Topologie, so gilt natürlich $T = \mathsf{Top}(T)$. Für topologische Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ definierten wir die Produkttopologie $\mathcal{T}_{X\times Y}$ auf dem cartesischen Produkt $X \times Y$. Machen Sie sich bitte folgendes klar:

1. $\mathcal{T}_{X\times Y} = \mathsf{Top}(\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y)$.
2. In der Regel gilt $\mathcal{T}_{X\times Y} \neq \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$. Was wäre eine Ausnahme zu dieser Regel?

Mit der Spur - oder Relativtopologie versteht man folgendes Konzept: Ist $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge, so wird durch

$$\mathcal{T}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{T}_X\}$$

eine Topologie auf A induziert. Das haben Sie durchdrungen, wenn Sie folgendes Beispiel verstehen: Sei $X = \mathbb{R}$, versehen mit der Standardtopologie, und $A := [0, \infty) \subset X$ versehen mit der Spurtopologie. Dann ist $[0, x) \subset A$ offen (bzgl. $\mathcal{T}_A$) für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Wiederholung: Induzierte Strukturen

Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so induziert die Norm $\|\cdot\|$ eine Metrik $d_{\|\cdot\|}$; konkret

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\| \qquad (x, y \in X)\,.$$

Diese Tatsache sowie die Axiome der normierten/metrische Räume (N1) - (N3)/ (M1) - (M3) sollten Ihnen mittlerweile geläufig sein. Weiter, ist (X, d) ein metrischer Raum, so erlaubt uns der Abstandsbegriff d von offenen Teilmengen von X zu sprechen. Kurz:

Jede Metrik d auf einer Menge X induziert eine Topologie $\mathcal{T}_d$.

Aber: Nicht jede Topologie ist metrisch, d.h. von einer Metrik induziert. Z.B. ist die kofinite Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{cf},X}$ auf einer unendlichen Menge X nicht metrisch (Übungsblatt 2). Denn: $\mathcal{T}_{\mathrm{cf},X}$ ist nicht Hausdorffsch, wohingegen jede metrische Topologie notwendigerweise Hausdorffsch ist.
Nun kommen wir zu einer weiteren wichtigen Sache für metrische Topologien: Die Topologie ist nicht eindeutig durch die Metrik bestimmt. Beispiel: Ist (X, d) ein metrischer Raum, so wird durch

$$d_1(x, y) := \min\{d(x, y), 1\} \qquad (x, y \in X)$$

eine weitere Metrik auf X erklärt (Nachrechnen!). Nun sind die offenen Kugeln um Punkte $x \in X$ mit Radien $0 < r < 1$ für beide Metriken gleich, i.e.:

$$\{y \in X \mid d(x, y) < r\} = \{y \in X \mid d_1(x, y) < r\}\,.$$

Folgern Sie nun $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_d$.
Am Rande: man könnte eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes als *beschränkt* erklären, falls

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} < \infty\,.$$

Da die Metrik d_1 beschränkt ist, wäre in (X, d_1) jede Menge beschränkt; für die Metrik d, sofern sie unbeschränkt ist, wäre diese aber nicht der Fall. Aus topologischer Sicht ist *Beschränktheit* für eine Metrik also kein sinnvoller Begriff. Sinnvoll ist der Terminus der *totalen Beschränktheit*: eine Teilmenge $A \subset X$ heisst *total beschränkt*, falls für jedes $\epsilon > 0$ endlich viele $x_1, \ldots, x_n$ in X existieren mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$$

Hier bezeichnet, wie oft üblich, $B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ die offene Kugel um x mit Radius $r > 0$. Wie Sie leicht sehen können stimmen die total beschränkten Mengen für d und d_1 überein. Mehr dazu erfahren Sie später, wenn wir uns dem Begriff der *Kompaktheit* annehmen.

Die Moral dieser Wiederholung fasst sich wie folgt zusammen:

Jede Norm induziert eine Metrik, jede Metrik eine Topologie.
Umgekehrt nicht - echt strikt!

Stetige Abbildungen von topologischen Räumen

Aus Analysis 1 rufen wir uns folgenden Satz in Erinnerung:

Satz/Definition.(Die drei äquivalenten Defintionen für Stetigkeit) *Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

1. *Für jede gegen x_0 konvergente Folge $x_n \to x_0$ in D folgt $f(x_n) \to f(x_0)$, in Kurzschreibweise*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$
2. $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0$: $\Big(\; |x - x_0| < \delta,\, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Big)$.
3. *Für jede Umgebung V von $f(x_0)$ in $\mathbb{R}$ existiert eine Umgebung U von x_0 in $\mathbb{R}$ mit $f(U \cap D) \subset V$.*

Ist eine dieser drei Aussagen erfüllt, so nennen wir f stetig *in x_0. Weiter heisst f* stetig, *falls f an jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig ist. Schliesslich sind äquivalent:*

1. *f ist stetig.*
2. *Urbilder offener Mengen sind offen, d.h. ist $O \subset \mathbb{R}$ offen, so ist $f^{-1}(O) \subset D$ offen bzgl. der Spurtopologie auf D (i.e. der von der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ induzierten Topologie auf D).*

Das Interessante an diesem Satz war, daß er sich verbatim auf metrische Räume übetragen lässt. Sie kramen aus Ihrem Gedächtnis oder Ihrer Vorlesungsmitschrift aus Analysis 1:

Satz/Definition.*Für eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen und $x_0 \in X$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, i.e. $d_X(x_n, x_0) \to 0$, folgt $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \to 0$; kurz: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
2. $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0$: $\Big(d_X(x, x_0) < \delta, x \in X \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon\Big)$.
3. *Für jede Umgebung V von $f(x_0)$ in Y existiert eine Umgebung U von x_0 in X mit $f(U) \subset V$.*

Ist eine dieser drei Aussagen erfüllt, so nennen wir f stetig *in x_0. Weiter heisst f* stetig, *falls f an jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig ist. Schliesslich sind äquivalent:*

1. *f ist stetig.*
2. *Urbilder offener Mengen sind offen, d.h. ist $O \subset Y$ offen, so ist $f^{-1}(O) \subset X$ offen.*

Jetzt, nach dieser Rekapitulation, sind wir soweit, um in [Fo2, §2] weiterlesen zu können. In wesentlichen Teilen haben wir das schon in Analysis 1 besprochen; zumindest sollten Sie den Anfang [Fo2, p. 22 - 29], welcher metrische Räume betrifft, zügig durcharbeiten können. Die Definition der Stetigkeit/Folgenstetigkeit einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen finden Sie auf [Fo2, p. 29]. Zentral in diesem Kapitel ist die Charakterisierung der Stetigkeit in [Fo2, Satz 10]. Das Ende des Kapitels [Fo2, p. 33 - 35] widmet sich linearen stetigen Abbildungen und wird in den Übungen besprochen.

Beschränktheit und Äquivalenz von Normen

Anders als für metrische Räume (X, d) ist der Begriff der Beschränktheit für normierte Vektorräumen $(V, \|\cdot\|)$ auf Grund der zusätzlichen Skalenstruktur sinnvoll. Eine Teilmenge $B \subset V$ nennt man *beschränkt*, falls ein $C > 0$ existiert mit

$$\|x\| \leq C \qquad (x \in B)\,.$$

Die von der Norm $\|\cdot\|$ induzierte Topologie auf V bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. Weiter bezeichnen wir mit

$$\mathcal{B}_{\|\cdot\|} := \{B \subset B \mid B \text{ ist beschränkt}\}$$

das System der beschränkten Teilmengen. Schliesslich nennen wir zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem Vektorraum V *äquivalent*, falls Konstanten $C_1, C_2 > 0$ existieren mit

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \qquad (x \in V)\,.$$

Überlegen Sie sich bitte, daß diese Definition in der Tat eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf V erklärt.

Beispiel: Auf $V = \mathbb{R}^n$ sind alle p-Normen, $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|x\|_p := \big(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\big)^{\frac{1}{p}} \quad (p < \infty) \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty := \max_j |x_j|$$

zueinander äquivalent. Hinweis: Vergleichen Sie zuerst $\|\cdot\|_p$ mit $\|\cdot\|_\infty$.

Zentral ist nun der folgende, einfach zu beweisende Satz (Übungsblatt):

Satz. *Sei V ein Vektorraum und $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf V. Dann sind gleichbedeutend:*

1. $\|\cdot\|_1$ *und* $\|\cdot\|_2$ *sind äquivalent.*
2. $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{B}_{\|\cdot\|_2}$.
3. $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$.

Der wesentliche Satz ist aber:

Normenvergleichssatz. *Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum sind alle Normen zueinander äquivalent.*

Der konzeptuelle Beweis des Satzes stützt sich auf den Begriff der Kompaktheit in allgemeinen topologischen Räumen - das Thema im nächsten Abschnitt. Ein bisschen was können wir aber schon zum Beweis des Satzes sagen. Sei dazu V ein fixierter endlichdimensionaler (stets reeller) Vektorraum. Durch Basiswahl identifizieren wir V mit $\mathbb{R}^n$, d.h. o.B.d.A. können wir $V = \mathbb{R}^n$ annehmen. Es genügt zu zeigen, daß eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|_\infty$ ist. Aus der Dreiecksungleichung bekommen wir

$$\|x\| = \|\sum_{i=1} x_i \mathbf{e}_i\| \leq \sum_{i=1} |x_i| \|\mathbf{e}_i\| \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1} \|\mathbf{e}_i\|$$

und demnach

$$\|x\| \leq C\|x\|_\infty \qquad (x \in V) \tag{1}$$

mit $C := \sum_{i=1} \|\mathbf{e}_i\| > 0$. Der schwierigere Teil ist das Auffinden einer zweiten Konstante $c > 0$ mit

$$c\|x\|_\infty \leq \|x\| \quad (x \in V)\,.$$

Das machen wir später. Aus der Ungleichung (1) ersehen wir aber sofort das folgende

Lemma. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine $\|\cdot\|_\infty$-beschränkte Teilmenge. Dann ist B auch $\|\cdot\|$-beschränkt für eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$.*

Motiviert aus dem obigen Lemma definieren wir eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ als *beschränkt*, falls diese $\|\cdot\|_\infty$-beschränkt ist.

Kompaktheit - Teil 1

Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ definierten wir in Analysis 1 als kompakt, sofern sie beschränkt und abgeschlossen ist. Wesentlich war auch jene Charakterisierung der Kompaktheit, in Essenz der Satz von Bolzano-Weierstraß:

Satz. *Für eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent:*

1. *K ist kompakt, d.h. K ist beschränkt und abgeschlossen.*
2. *Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K.*

Ausgehend von diesem Satz, könnte man nun versuchen den Begriff der Kompaktheit auf metrische Räume zu verallgemeinern. Aber, wie wir bereits gesehen haben, muss der Begriff der Beschränktheit in metrischen Räumen mit großer Vorsicht genossen werden. Wir erinnern uns an den Begriff der totalen Beschränktheit und formulieren den folgenden Satz:

Satz. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum (etwa $X = \mathbb{R}^n$ mit $d(x, y) := \|x - y\|_p$). Dann sind für eine Teilmenge $K \subset X$ folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K.*
2. *K ist abgeschlossen und total beschränkt.*

Der Beweis findet sich in dem etwas anspruchsvolleren Buch von J. Dieudonné, *Grundzüge der modernen Analysis 1*, Satz 3.16.1.
Nun könnte man allgemein einen metrischen Raum (X, d) als kompakt definieren, falls jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Für allgemeine topologische Räume, z.B. solche ohne abzählbare Basis, ist das Arbeiten mit Folgen unpassend

und nicht zielführend. Eine andere Definition der Kompaktheit erweist sich als sinnvoller.
Um der Übersichtlichkeit der Darstellung willen, machen wir eine kleine Einschränkung und fordern:

Von nun an sei jeder betrachtete topologische Raum Hausdorffsch.

Sein nun X ein (Hausdorffscher) topologischer Raum. Eine Teilmenge $K \subset X$ heisst *kompakt*, falls für jede Überdeckung von K mit offenen Mengen eine endliche Teilüberdeckung existiert; mehr in Symbolen: gilt $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ für eine Familie von offenen Mengen $(U_i)_{i \in I}$, so existiert eine endliche Teilmenge $E \subset I$ der Indexmenge I mit $K \subset \bigcup_{i \in E} U_i$. Vgl. [Fo2, §3, p. 36].

Der Satz von Maximum und Minimum in seiner allgemeinsten Form lautet dann:

Satz. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen (Hausdorffschen) topologischen Räumen. Dann bildet f kompakte Teilmengen auf ebensolche ab.*

Beweis. Sei $K \subset X$ kompakt. Z.z.: $f(K) \subset Y$ ist kompakt. Sei dazu $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ eine offene Überdeckung von $f(K)$ in Y. Da f stetig ist, ist $U_i := f^{-1}(V_i)$ offen in X. Weiter,

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}(\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i \,.$$

Für die letzte Gleichheit verwendeten wir

Der Urbildoperator $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ assoziiert zu einer Abbildung $f : X \to Y$ von Mengen vertauscht mit allen mengentheoretischen Operationen, insbesondere mit der beliebigen Vereinigungen von Teilmengen: $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$.

Da K kompakt ist und $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, gibt es per Definition der Kompaktheit eine endliche Teilmenge $E \subset I$ mit $K \subset \bigcup_{i \in E} U_i$. Damit gilt

$$f(K) \subset f(\bigcup_{i \in E} U_i) = \bigcup_{i \in E} f(U_i) \subset \bigcup_{i \in E} V_i \,.$$

Also ist $f(K)$ kompakt in Y. $\square$