Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

5. Anleitung zum Selbststudium

(KW21)

Das durchzuarbeitende Material für diese Woche ist [Fo2, §5, p. 66 - 75] und [Fo2, §6, p. 76 - 80].

Wiederholung: Stetige lineare Abbildungen

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir definierten die Operatornorm von T als

$$\|T\|_{\mathrm{op}} := \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V \leq 1}} \|T(v)\|_W \in [0, \infty].$$

Oftmals lässt man den Index "op" auch weg und verkürzt die Schreibweise zu $\|T\|$. Einfache Umwandlungen liefern folgende alternative Definitionen für $\|T\|$:

$$\|T\| = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V = 1}} \|T(v)\|_W = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}.$$

Im 3. Übungsblatt wurde gezeigt: T ist genau dann stetig, wenn $\|T\| < \infty$. In dem wichtigsten Spezialfall ist das immer so:

Satz. *Jede lineare Abbildung $T : V \to W$ zwischen endlichdimensionalen normierten Räumen ist stetig.*

Beweis. Nach dem Normenvergleichssatz genügt es $\|T\| < \infty$ für eine beliebige Norm auf V zu beweisen. Sei dazu $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann lässt sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$ darstellen (mit Koeffizienten $x_j \in \mathbb{R}$) und

$$\|v\|_V := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

definiert eine Norm auf V. Für $v \in V$ mit $\|v\|_V = 1$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \|T(v)\|_W &= \|T(\sum_{j=1}^n x_j v_j)\|_W = \|\sum_{j=1}^n x_j T(v_j)\|_W \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|T(v_j)\|_W && (1) \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \sum_{j=1}^n \|T(v_j)\|_W = \sum_{j=1}^n \|T(v_j)\|_W < \infty && (2) \end{aligned}$$

Hier verwendeten wir beim zweiten Gleichheitszeichen in (4) die Linearität von T und im nächsten Schritt die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_W$. Für den finalen Schritt in (5) haben wir $\|v\|_V = 1$ benutzt. Schliesslich beachten wir, daß $C := \sum_{j=1}^n \|T(v_j)\|_W < \infty$ nur von der fixierten Basis $\mathcal{B}$ und nicht von v abhängt. □

Zur Abrundung geben wir noch eine nicht-stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen an.

In der linearen Algebra lernt man, daß jeder Vektorraum V über einen Körper K eine Basis $\mathcal{B}$ besitzt. Eine Basis ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset V$ mit der Eigenschaft, daß sich für jeden Vektor $v \in V$ eine eindeutige **endliche** Teilmenge $E \subset \mathcal{B}$ finden lässt mit:

$$v = \sum_{b \in E} c_b b \text{ mit Koeffizienten } c_b \in K \setminus \{0\}\,. \tag{3}$$

Ich erinnere an die Konvention, daß die leere Summe den Wert 0 hat. Ist $\mathcal{B}$ endlich, so gilt $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und die etwas ungewohnte Schreibweise in (3) kommt wieder auf das vertraute $\sum_{j=1}^{n} c_j v_j$ zurück. Weiter wissen wir, daß je zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ die gleiche Kardinaliät haben, alias es gibt eine Bijektion von Mengen $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$. Dies erlaubt uns die Definition von Dimension: $\dim V := \operatorname{card} \mathcal{B}$.
Die Existenz von Basen in beliebigen Vektorräumen kann nur durch das Auswahlaxiom gewährleistet werden und konkrete Konstruktionen von Basen in Räumen von überabzählbarer Dimension sind in der Regel nicht möglich. Ein schönes Beispiel für einen unendlichdimensionalen Raum ist $V = \mathbb{R}$ aufgefasst als Vektorraum über $K = \mathbb{Q}$. Hier gilt $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \operatorname{card} \mathbb{R}$, was man mit ein wenig Übung in Abzählbarkeitslehre schnell verifiziert. Nach diesem Ausflug in die lineare Algebra kehren wir wieder zu den normierten Räumen zurück und betrachten

$$B(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt} \}\,,$$

versehen mit der Norm $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Dies ist ein Raum von gewaltiger Dimension: Die Inklusionskette von Mengen

$$B(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]^{\mathbb{R}} \supset [-1, 1]^{\mathbb{R}} \supset \{0, 1\}^{\mathbb{R}} \simeq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

liefert die Heuristik daür, daß $\dim B(\mathbb{R})$ mindestens überüberabzählbar ist, i.e. $\dim B(\mathbb{R}) \geq \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir ein Element $f_n \in B(\mathbb{R})$ durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beachte: $\|f_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{B}_0 := \{f_1, f_2, \dots\}$ ist eine linear unabhängige Teilmenge in $B(\mathbb{R})$. Wir ergänzen $\mathcal{B}_0$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ von $B(\mathbb{R})$ und definieren eine Abbildung

$$T_0 : \mathcal{B} \to \mathbb{R}, \quad b \mapsto \begin{cases} n & \text{falls } b = f_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{für } b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0. \end{cases}$$

Mittels linearer Fortsetzung erklären wir eine lineare Abbildung durch

$$T : B(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \sum_{b \in E} c_b b \mapsto \sum_{b \in E} c_b T_0(b) \qquad (E \subset \mathcal{B} \text{ endlich})\,.$$

Diese recht unnatürliche lineare Abbildung ist jetzt auch nicht stetig, denn

$$\|T\| = \sup_{\substack{f \in B(\mathbb{R}) \\ \|f\| = 1}} |T(f)| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} |T(f_n)| = \infty\,.$$

Wiederholung Kurven: Elliptische Integrale

Seien $0 < a \leq b$ gegeben. Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf die Menge

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

Für $a = b$ ist E ein Kreis mit Radius a und Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^2$. Allgemein stellt E eine im Ursprung zentrierte Ellipse mit den Halbachsen a und b dar.

1. Skizzieren Sie E.
2. Weisen Sie nach, daß durch

   $$\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

   eine injektive C^1-Parametrisierung von E gegeben wird.
3. Berechnen Sie $\gamma'(t)$, $\|\gamma'(t)\|_2$ und erinnern Sie sich an die Längenformel $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|_2 \; dt$.
4. Sei $1 \geq k \geq 0$ erklärt durch $k^2 = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Zeigen Sie, daß

   $$L(E) = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \; dt$$

   gilt. Was erhalten Sie für $a = b$?
5. Das *elliptische Integral 2. Art* ist in der Legendre Normalform durch

   $$E(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \; dt \qquad (0 \leq k \leq 1)$$

   gegeben und ist nicht durch eine elementare Funktion in k darstellbar. Wie wir gleich sehen werden, ist $E(k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n$ eine für $k < 1$ konvergente Potenzreihe mit berechenbaren Koeffizienten a_n. Sei nun $k < 1$ (was geschieht für $k = 1$?). Dann ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Betrag von $x := k^2 \sin^2 t$ kleiner als 1. Also konvergiert die Binomialreihe

   $$\sqrt{1 - x} = B_{\frac{1}{2}}(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^n k^{2n} \sin^{2n} t$$

   für festes k gleichmässig auf $[0, \frac{\pi}{2}]$. Damit können wir Integration und Summation vertauschen [M, Satz 8.19] und erhalten

   $$E(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^n k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \; dt .$$

   Zweimalige partielle Integration liefert für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, die folgende Rekursionsformel für Stammfunktionen:

   $$\int \sin^m x dx = -\frac{\sin x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \; dx .$$

Auswerten an den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ resultiert in

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \; dt &= \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(n-1)} t \; dt \\
&= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(n-2)} t \; dt \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{2n-(2j+1)}{2n-2j} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} .
\end{aligned}$$

Schliesslich ist

$$\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 \frac{1}{1-2n}$$

und damit erhalten wir für die Werte der elliptischen Integrale die Formel

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 \frac{k^{2n}}{1-2n} .$$

Wiederholung: Partielle Differenzierbarkeit

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man nennt f *partiell differenzierbar*, falls alle partiellen Ableitungen $\partial_i f$, $1 \le i \le n$, existieren. Diese Definition ist üblich und weit verbreitet. Ob sie auch wirklich sinnvoll ist, dürfen Sie gleich selbst entscheiden.
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \to \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht stetig in 0: Wir geben uns eine Einheitsrichtung $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ fest vor und setzen $\gamma(t) := tv$ für $t \in \mathbb{R}$. Nun ist

$$f(\gamma(t)) = \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta) .$$

Wäre f stetig in 0, so würde auch $\lim_{(x_1,x_2)\to 0} f(x_1, x_2) = 0$ gelten. Insbesondere hätten wir $\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0$. Das ist aber nur für $\theta \in \mathbb{Z}\frac{\pi}{2}$ der Fall (d.h. entlang der Koordinatenachsen $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$.) Andrerseits ist f partiell differenzierbar in 0: Es gilt

$$\partial_1 f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathbf{e}_1) - f(0)}{t} = 0$$

und ebenso erhalten wir $\partial_2 f(0) = 0$. Für jede andere Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ des $\mathbb{R}^2$ mit $v_i \notin \mathbb{R}\mathbf{e}_j$ existieren $\partial_{v_j} f(0)$ nicht, da $f \circ \gamma_{v_j}$ noch nicht einmal stetig in $t = 0$ ist. Ergo: Der Begriff der partiellen Differenzierbarkeit ist abhängig von der Basis.

Zum Abschluss dieser Wiederholung noch ein Knacki:

Ist jede kurvendifferenzierbare Funktion stetig?

Stetig partiell differenzierbar und der Satz von Schwarz

Ein partiell differenzierbare Funktion heisst *stetig partiell differenzierbar*, falls alle partiellen Ableitungen $\partial_i f : D \to \mathbb{R}$ stetig sind. Das nächste Lemma zeigt, daß diese Definition basisunabhängig ist.

Lemma. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Dann existiert jede Richtungsableitung $\partial_v f$ von f und es gilt*

$$\partial_v f(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j \partial_j f(x) \qquad (x \in D)$$

mit $v = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_j$. Insbesondere is $\partial_v f$ stetig.

Beweis. Des Pudel's Kern ist bei $n = 2$ verortet (Induktion). Also nehmen wir das an. Sei $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ fest und $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ eine ebenso fest vorgegebene Richtung. Wir erinnern an die Definition der Richtungsableitung:

$$\partial_v f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1 + tv_1, x_2 + tv_2) - f(x_1, x_2)}{t}\,. \tag{4}$$

Um die simultane Abhängigkeit von t in beiden Koordinateneinträgen zu entkoppeln, fügen wir in altbekannter Weise eine "Null" ein:

$$\begin{aligned} f(x_1 + tv_1, x_2 + tv_2) - f(x_1, x_2) \quad &= \quad f(x_1 + tv_1, x_2 + tv_2) - f(x_1 + tv_1, x_2) + \\ +f(x_1 + tv_1, x_2) - f(x_1, x_2)\,. & \end{aligned} \tag{5}$$

Da $\partial_1 f(x)$ existiert, folgern wir sogleich:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1 + tv_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{t} = v_1 \partial_1 f(x)\,. \tag{6}$$

Setzen wir (5) und (6) in (4) ein, so verbleiben wir mit der Verifikation von

$$L_2 := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1 + tv_1, x_2 + tv_2) - f(x_1 + tv_2, x_2)}{t} = v_2 \partial_2 f(x)\,. \tag{7}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ klein genug, um $B_\epsilon(x) \subset D$ zu gewährleisten. Für unsere nächste Überlegung halten wir $|t| < \epsilon$ zunächst fest und betrachten die Funktion

$$g(s) := f(x_1 + tv_1, x_2 + sv_2) \qquad (s \in \mathbb{R};\ |s| \le \epsilon)\,.$$

Der MWS liefert uns dann

$$g(t) - g(0) = g'(\xi)t$$

für ein $0 \le \xi \le t$ (welches von t abhängt; präzise $\xi = \xi(t)$). Nun ist

$$g(t) - g(0) = f(x_1 + tv_1, x_2 + tv_2) - f(x_1 + tv_2, x_2)$$

und $g'(\xi) = v_2 \partial_2 f(x_1 + tv_1, x_2 + \xi v_2)$ nach der Kettenregel. Nun lassen wir $|t| < \epsilon$ wieder freien Lauf und erhalten:

$$L_2 = \lim_{t\to 0} v_2 \partial_2 f(x_1 + tv_1, x_2 + \xi(t) v_2)$$

Wegen der Stetigkeit von $\partial_2 f$ und $\lim_{t\to} \xi(t) = 0$ gelingt uns schliesslich der Nachweis von (7). □

Die stetig partiell differenzierbaren Funktionen bilden einen Vektorraum, der mit $C^1(D)$ bezeichnet wird. Iterativ definieren wir $C^k(D)$ als den Raum der Funktionen, für welche alle iterierten Ableitungen

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} f \qquad (1 \le i_j \le n;\ 0 \le m \le k) \tag{8}$$

existieren und stetig sind.
Jetzt kann man sich fragen inwieweit die gemischte Ableitung in (8) von der Reihung der ∂_{i_j} abhängt.

Beispiel. *Sei*

$$f(x_1, x_2) = \sum_{1 \le, i, j \le N} a_{ij} x_1^i x_2^j$$

ein Polynom in zwei Variablen. Dann gilt $\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f$. *Dazu genügt es* $f(x_1, x_2) = x_1^m x_2^n$ *zu betrachten. Wir rechnen*

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = m x_1^{m-1} x_2 \quad \textit{und} \quad \partial_2 f(x_1, x_2) = n x_1^m x_2^{n-1}$$

und bekommen im nächsten Schritt

$$\partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) = \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) = mn x_1^{m-1} x_2^{n-1} \,.$$

Nach diesem Beispiel wundert man sich vielleicht nicht mehr so sehr über den

Satz von Schwarz. *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f \in C^2(D)$. *Dann gilt für alle* $1 \le i, j, \le n$

$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x) \qquad (x \in D) \,.$$

Bemerkungen. *(a) Der Satz von Schwarz wird falsch für lediglich zweifach partiell differenzierbare Funktionen, i.e. die Stetigkeit der partiellen Ableitung bis zum zweiten Grad ist essentiell. Ein Gegenbeispiel wird in den Übungen behandelt, siehe auch* [Fo2, Aufgabe 5.2].
(b) Der Beweis in [Fo2, p. 69] *enthält einige semantische Ungenauigkeiten, welche den kritischen Erstleser aus der Bahn werfen. Konkret: Im ersten Teil des Beweises ist der Punkt* y *fest vorgegeben und das aus dem MWS resultierende* ξ *würde bei variablem* y *auch von* y *abhängen. Es ist besser die Vorschrift* $y \mapsto D_1(\xi, y)$ *in* $z \mapsto D_1(\xi, z)$ *umzubenennen, um dann bei* $z = y$ *erneut den MWS anzuwenden. Im zweiten Teil des Beweises wiederholt sich das wieder. Eigentlich ist auch* x *fest und das Variieren von "*x*"bedarf eigentlich einer neuen Variable. Nach dieser Hilfestellung, sollte es Ihnen nun möglich sein, die Argumentation zu verstehen.*
Ein interessanter alternativer Zugang zum Satz von Schwarz findet sich bei Soergel [S2]*: Er führt zuerst die elementare Riemannsche Integrationstheorie mehrerer Veränderlicher ein: Das Integral einer stetigen Funktion* f *über einen Quader* $Q := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ *wird durch*

$$\int_Q f := \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\ dx_1 \right) \dots \right) dx_n \tag{9}$$

erklärt. Man rechnet hier von innen nach aussen: für die Berechnung des inneren Integrals sind $x_2, \dots, x_n$ *fest etc. Für elementare Funktion* $f(x) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$ *sieht man schnell, daß das Integral faktorisiert*

$$\int_Q f := \prod_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} f_j(x_j)\ dx_j \,. \tag{10}$$

Nun hängt die rechte Seite in (10) *nicht von der Integrationsreihenfolge in* (9) *ab. Weiter, da sich jede stetige Funktion auf einem kompakten Quader gleichmässig mit Linearkombinationen elementarer Funktionen approximieren lässt, erhalten wir die Unabhängigkeit des Riemann-Intergrals von der Reihung der Koordinaten. Ein Korollar davon ist der Satz von Schwarz* [S2, Korollar 2.1.10].

Lesen Sie nun [Fo2, §5] zu Ende.

Die Ableitung ist ein linearer Operator

Wegen einem zu viel an "D", ändern wir unsere Symbole etwas: den Definitionsbereich einer Funktion nennen wir fortan nicht mehr D, sondern schreiben U. Sei nun $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Weiter verallgemeinern wir von skalarwertigen Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ zu vektorwertigen Abbildungen:

$$f : U \to \mathbb{R}^m, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Wir halten $x_0 \in U$ fest und stellen uns die Frage, wie wir $f(x)$ in der Nähe von x_0 analysieren können. Sei dazu $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x_0) \subset U$.
Wir nennen f bei x_0 *linear approximierbar* oder *differenzierbar*, falls eine Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ existiert mit

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Av + R(v) \qquad (v \in B_\epsilon(0))$$

für einen Restterm $R : B_\epsilon(0) \to \mathbb{R}^m$, welcher

$$\lim_{v \to 0} \frac{R(v)}{\|v\|} = 0 \tag{11}$$

genügt.

Bemerkungen. *(a) In* (11) *haben wir die Norm* $\|\cdot\|$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *nicht weiter spezifiziert. Nach dem Normenvergleichssatz ist das auch nicht relevant.*
(b) Der Fall $m = 1$*, i.e.* $f : U \to \mathbb{R}$*, ist von gesondertem Interesse. Hier ist* A *eine* $1 \times n$*-Matrix, d.h. ein* <u>*Zeilenvektor*</u>*, den Sie dann auf den Spaltenvektor und* $n \times 1$*-Matrix* v *anwenden können, um mit* $Av \in \mathbb{R}$ *einen Skalar (*1×1*-Matrix) zu erhalten.*
(c) Aus dem Normenvergleichssatz erhalten wir auch, daß auf einen endlich dimensionalem Vektorraum V *genau eine Norm-Topologie, die sogenannte Euklidische Topologie, existiert. Somit sollte klar sein, was von nun an gemeint ist, wenn wir von offenen Mengen* $U \subset V$ *sprechen. Für zwei endlichdimensionale Vektorräume* V, W *bezeichnen wir mit*

$$\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \to W \mid T \textit{ ist linear}\}$$

den Raum der Morphismen $V \to W$*. Sein nun* $U \subset V$ *offen und* $f : U \to W$ *eine Abbildung. Dann heißt* f *differenzierbar in* $p \in U$*, falls ein* $A \in \mathcal{L}(V, W)$ *existiert mit*

$$f(p + v) = f(p) + A(v) + R(v) \qquad (v \in U - p)$$

für einen Restterm $R : U - p \to W$ *mit*

$$\lim_{v \to 0} \frac{R(v)}{\|v\|} = 0\,. \tag{12}$$

Dieser Kontext ist darüberhinaus sinnvoll auf Banchräume V, W erweiterbar, wobei wir allerdings in der Definition der Morphismen $V \to W$ noch Stetigkeit neben dem Erhalt der linearen Strukturen fordern müssen; kurz:

$$\mathcal{L}(V,W) := \{T : V \to W \mid T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Lemma. *Seien V, W Banachräume, $U \subset V$ offen und $f : U \to W$ eine im Punkt $p \in U$ durch $A \in \mathcal{L}(V,W)$ linear approximierbare Funktion. Dann ist A eindeutig.*

Beweis. Angenommen f wäre in p durch zwei Morphismen $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(V,W)$ mit Resttermen R_1 und R_2 linear approximierbar. Wir setzen $C := A_1 - A_2$. Den Nachweis von $C = 0$ führen wir über die Verifikation von $\|C\| = \|C\|_{\mathrm{op}} = 0$. Für jedes $\epsilon > 0$ und $T \in \mathcal{L}(V,W)$ bemerken wir vorab

$$\|T\| = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|T(v)\| = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=\epsilon}} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|}.$$

Mit $C = R_2 - R_1$ schätzen wir ab

$$\|C\| = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=\epsilon}} \frac{\|C(v)\|}{\|v\|} \le \sup_{\|v\| \le \epsilon} \frac{\|R_1(v)\|}{\|v\|} + \sup_{\|v\| \le \epsilon} \frac{\|R_2(v)\|}{\|v\|}$$

und schliessen mit (12), daß in der Tat $\|C\| = 0$. □.

Nach diesem kurzen Ausflug ins mehr Abstrakte, kehren wir wieder in den für Sie noch vertrauteren Rahmen $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ zurück. Ist f in $x \in U$ differenzierbar, so nennen wir den linearen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{R})$ die *Ableitung* oder das *Differential* von f in x; ich bin an die Bezeichnung

$$df(x) := A$$

gewohnt, aber üblich ist auch $Df(x)$. Ist f differenzierbar auf U, so stellt die Ableitung eine Funktion mit Werten in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dar:

$$df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad x \mapsto df(x).$$

Ist speziell $m = 1$, so gilt

$$df(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)) \in (\mathbb{R}^n)^T.$$

Gegeben eine Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le m}} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, so errechnen sich die Einträge a_{ij} durch

$$a_{ij} = \langle A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$$

mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$. Hier ist die Notation etwas schlampig, denn das $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ und das $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^m$ sind in möglicherweise verschiedenen Vektorräumen. Als Anwendung davon erhält man schnell

$$df(x) = (\partial_i f_j(x))_{i,j}.$$

Lesen Sie nun [Fo2, §6 p.76 - 80]. Bemerken Sie bitte auch die Ähnlichkeit von [Fo2, p. 79, Satz 2] mit unserem Lemma über die Richtungsableitung aus dem vorherigen Paragraphen.