Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

6. Anleitung zum Selbststudium

(KW22)

Das durchzuarbeitende Material für diese Woche ist [Fo2, §6 zu Ende] und die Taylorformel in mehreren Veränderlichen: [M, 10.7] oder [Fo2, §7, p. 87 - 92].

Zu unserem derzeit allesbestimmenden Thema haben sich nun auch Kollegen zu Wort gemeldet. In dem Artikel

A surprising formula for the spread of Covid-19 under aggressive management

modelliert Prof. Cherednik die Ausbreitung von Covid-19 in frappierender Exaktheit mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung, genauer, der Besselschen DGL. Die gewöhnlichen DGL's sind noch Thema dieses Kurses und werden gegen Ende behandelt. Im Abgleich mit dem Aufsatz

The end of exponential growth: The decline in the spread of coronavirus

von dem Mathematiker und Militärwissenschaftler Isaac Ben-Israel bietet sich der Artikel von Cherednik als Thema einer Examensarbeit für das Lehramt an. Melden Sie sich bei Interesse!

Nicht vorenthalten darf ich Ihnen auch nicht die Rede des Präsidenten von Tansania

Die Papaya hat Corona.

In unserer eigenen Bananenrepublik spielt sich der wissenschaftliche Skandal auf etwas höherer Ebene ab: Wir haben glücklicherweise noch ausgewiesene Fachleute, welche die Gefährlichkeit und Natur des Virus von Anfang an korrekt bewertet haben (als Beispiel Prof. Bhakdi vom 19.03.2020). Diese Stimmen fanden allerdings kein ernsthaftes öffentliches Gehör, sondern wurden, ganz in Erinnerung an dunkle Zeiten, auf das Perfideste niedergemacht. Geehrt wird dann bei uns einer, der mit seinen Prognosen nachweislich stets daneben lag; die abgeschmackte Preisung, verfasst im Stil der Inversion, können Sie hier einsehen.
Die Moral von dieser Gschicht':

Glaubt den Fernsehprofessoren nicht!

Wiederholung: Der Gradient

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $U \subset V$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine skalarwertige differenzierbare Abbildung. Die Ableitung df war dann eine Abbildung

$$df : U \to \mathcal{L}(V, \mathbb{R}), \quad x \mapsto df(x) .$$

Nun ist $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ der sogenannte Dualraum von V und wird üblich mit V^* bezeichnet. Ist W ein weiterer Vektorraum und

$$B : W \times V \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto B(v, w)$$

eine nicht ausgeartete Bilinearform, so kann man via B den Dualraum V^* mit W identifizieren: Die Abbildung

$$\Phi : W \to V^*, \quad w \mapsto \Phi(w) := B(w, \cdot)$$

ist ein Isomorphismus in der Kategorie der linearen reellen Räume. Für $V = \mathbb{R}^n$ gibt es zwei Standard-Bilinearformen: Die erste ist die Matrizenmultiplikation mit $W = (\mathbb{R}^n)^T$, dem Raum der Zeilenvektoren, und B_1 der Matrizenmultiplikation

$$B_1 : (\mathbb{R}^n)^T \times (\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad (w^T, v) \mapsto w^T v .$$

Die Identifikation Φ_1 liefert uns $df(x) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))$ als Zeilenvektor, d.h. genau so, wie wir die Ableitung Matrixform definiert haben. Eine weitere Bilinearform ist das Standardskalarprodukt mit $W = V$:

$$B_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j .$$

Via $(\mathbb{R}^n)^* \simeq_{\Phi_2} \mathbb{R}^n$ wird $df(x)$ zum Spaltenvektor, den man üblicherweise als Gradient von f bezeichnet; in Symbolen

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} .$$

Eine andere Bezeichnung für $\operatorname{grad} f$ ist auch ∇f, wobei

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$$

als ein linearer Differentialoperator verstanden wird, i.e. als die lineare Abbildung

$$\nabla : \mathcal{F}_{\text{diff}}(U, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n), \ f \mapsto \operatorname{grad} f .$$

Hier ist $\mathcal{F}_{\text{diff}}(U, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller differenzierbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$ bezeichnet den Vektorraum aller Abbildungen $F : U \to \mathbb{R}^n$.
Funktionen $F \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$ nenn man auch *Vektorfelder*, da jedem Punkt $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ eine Richtung $F(p) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet wird. Für $n = 2$ finden Sie dazu jede Menge Pfeilchenbilder in der Literatur: [M, p. 193], [S2, p. 107]. Jetzt kann man sich fragen, welche geometrische Bedeutung das Gradientenvektorfeld $\operatorname{grad} f$ einer differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ hat. Die Antwort lautet:

$$\operatorname{grad} f \textit{ zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs von } f.$$

Wir beleuchten die Aussage aus zwei verschiedenen Perspektiven; die erste mehr algebraisch und die zweite rein geometrisch. (Einheits)richtungen im $\mathbb{R}^n$ werden durch Elemente der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_2 = 1\}$$

beschrieben. Sein nun $p \in U$ fest und $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ eine Richtung. Wir betrachten die Funktion $\phi_v(t) := f(p+tv)$ mit $|t| < \epsilon$ wobei $\epsilon > 0$ so klein ist, damit $B_\epsilon(p) \subset U$. Die Richtung des steilsten Anstiegs bei p ist sicherlich dasjenige v, für welches $\phi_v'(0)$ maximal ist. Abspulen der gelernten Begriffe liefert:

$$\phi_v'(0) = \partial_v f(p) = df(p)(v) = \langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle \, .$$

Ist $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$, so ist demnach die Richtung $v_{\max}$ mit maximalen Anstieg eindeutig und durch

$$v_{\max} := \mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{R}_{>0} \cdot \operatorname{grad} f(p)$$

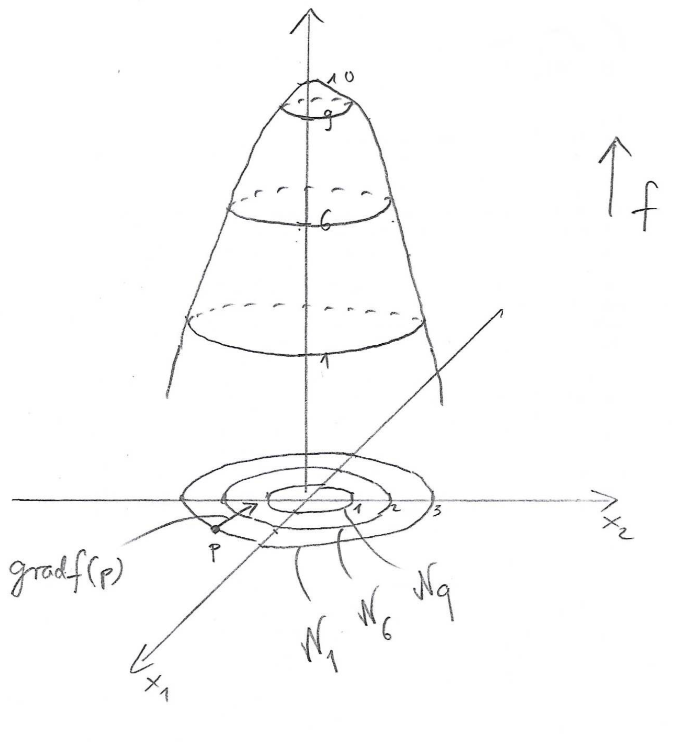
gegeben.
Kommen wir zur geometrischen Seite: Für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$\mathcal{N}_c := \{x \in U \mid f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$$

die *Niveaumenge* von f zum Niveau c. Im Fall $n = 2$ sprechen wir auch von Niveau- oder Höhenlinien. Wir diskutieren ein Beispiel: $U = \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) = 10 - x_1^2 - x_2^2$. Dann ist

$$\mathcal{N}_c = \begin{cases} \varnothing & \text{für } c > 10, \\ \sqrt{10-c} \cdot \mathbb{S}^1 & \text{für } c \leq 10\,. \end{cases}$$

In anderen Worten, die Nieveaumengen sind entweder leer oder Kreise mit Radius $\sqrt{10-c}$ für $c \leq 10$, degeneriert zu einem Punkt für $c = 10$.



Vom Studium der Wanderkarten wissen wir, daß der Weg am steilsten wird, wenn er die Höhenlinien senkrecht kreuzt. Sei nun $\mathcal{N}_c$ eine Höhenline mit $c < 10$. Dann wird $\mathcal{N}_c$ durch

$$\gamma : [0, 2\pi) \to \mathcal{N}_c, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{10 - c} \cdot \cos t \\ \sqrt{10 - c} \cdot \sin t \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Nun ist die Funktion $\phi(t) = f(\gamma(t)) = c$ konstant, d.h. die Ableitung verschwindet. Ergo

$$0 = \phi'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle .$$

In anderen Worten: Der Gradient steht auf den Höhenlinien senkrecht.

Wiederholung: Die Ableitung bilinearer Abbildungen

Seien V_1, V_2, W allesamt reelle Vektorräume endlicher Dimension und

$$B : V_1 \times V_2 \to W, \quad (v_1, v_2) \to B(v_1, v_2)$$

eine bilineare Abbildung. Mit

$$\mathcal{L}_2(V_1, V_2; W) := \{B : V_1 \times V_2 \to W \mid B \text{ ist bilinear}\} .$$

wird ein weiterer linearer Raum erklärt.

Beispiele. *(a) Das Kreuzprodukt*

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto x \times y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

ist eine schiefsymmetrische bilineare Abbildung.
(b) Für $V_1 = V_2 = V_3 = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ wird mit dem Kommutator

$$\begin{gathered} [\cdot,\cdot] : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ (A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA \end{gathered}$$

eine schiefsymmetrische Abbildung erklärt, die sogenannte Lie-Klammer.
(c) Für $\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$ und $W = \mathbb{R}$ gilt $\dim \mathcal{L}_2(V_1, V_2; \mathbb{R}) = mn$. Wir können auch einen (nicht-kanonischen) Isomorphismus $\mathcal{L}_2(V_1, V_2; \mathbb{R}) \simeq M_{n\times m}(\mathbb{R})$ angeben, nämlich: Mit einer Basis $\mathcal{B}_1 := \{v_1, \dots, v_n\}$ von V_1 und einer Basis $\mathcal{B}_2 := \{w_1, \dots, w_m\}$ von V_2 wird mit

$$\Phi_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} : \mathcal{L}_2(V_1, V_2; \mathbb{R}) \to M_{n\times m}(\mathbb{R}), \quad B \mapsto (B(v_i, w_j))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$$

ein (basisabhängiger) Isomorphismus erklärt.
(d) Die wichtigste Bilinearform kommt am Ende: Das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j .$$

Folgern Sie nun mit (c), daß jede Bilinearform $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von der Gestalt

$$B(x, y) = \langle Cx, y \rangle$$

mit einer eindeutig bestimmten Matrix $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist.

Nach dieser Orgie von Beispielen sind sie wahrscheinlich überzeugt, daß Bilinearformen fundamental in der Mathematik sind. In den Übungen berechneten wir die Ableitung einer Bilinearform $B : V_1 \times V_2 \to W$ zu

$$dB : V_1 \times V_2 \to \mathcal{L}(V_1 \times V_2, W)$$

$$dB(v_1, v_2)(u_1, u_2) = B(v_1, u_2) + B(u_1, v_2)\,. \tag{B}$$

Verstehen Sie die Formel? Schauen Sie sich bitte auch den Beweis nochmals genau an.

Ableitungsregeln und der Mittelwertsatz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ in einem Punkt $p \in U$ differenzierbare Abbildungen. Dann sind auch λf und $f + g$ in p differenzierbar und es gilt

$$d(\lambda f)(p) = \lambda df(p) \quad \text{und} \quad d(f+g)(p) = df(p) + dg(p)\,.$$

Der Beweis is parallel zum bekannten Fall von $m = n = 1$ und wir gehen nicht weiter darauf ein. Bei der Leibnizregel müssen wir etwas vorsichtiger sein, da es ein Vielzahl von Multiplikationen (i.e. bilineare Abbildungen) $\bullet : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ gibt (nennen Sie welche!), die uns die Definition einer Multiplikation von Funktionen $f \bullet g$ erlauben. Gegeben eine Multiplikation $\bullet$, so ist $f \bullet g$ in p differenzierbar und es gilt:

$$d(f \bullet g)(p)(v) = f(p) \bullet [dg(p)(v)] + [df(p)(v)] \bullet g(p) \qquad (v \in \mathbb{R}^n)\,. \tag{L}$$

Der Nachweis von (L) erfolgt elegant aus der Kettenregel und der Ableitungsformel für Bilinearformen (B).
Wir formulieren nun die Kettenregel. Gegeben seien Funktionen $f : U_1 \to \mathbb{R}^m$ und $g : U_2 \to \mathbb{R}^k$ mit $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ beide offen. Weiter sei $f(U_1) \subset U_2$, was uns die Definition der Komposition

$$g \circ f : U_1 \to \mathbb{R}^k, \quad x \mapsto g(f(x))$$

erlaubt. Sei nun f in $p \in U_1$ und g in $q := f(p) \in U_2$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ in p differenzierbar und es gilt

$$d(g \circ f)(p) = dg(q) \circ df(p)\,.$$

Hier ist die Verkettung auf der rechten Seite die Matrizenmultiplikation: die $k \times m$-Matrix $dg(q)$ multipliziert sich von rechts mit der $m \times n$-Matrix $df(p)$ zu einer $k \times n$-Matrix $dg(q) \circ df(p)$. Beweise der Kettenregel finden sich in [M, Satz 10.12] oder [Fo2, §6, Satz 3].
Lesen Sie nun [Fo2, §6] oder [M, 10.4 - 10. 5] zu Ende: die Themen sind der Mittelwertsatz [Fo2, Satz 5] oder [M, Satz 10.17] und als Korollar davon der Schrankensatz [M, Satz 10.20].

Die Taylor-Formel

Persönlich ziehe ich die Abhandlung in [M, 10.7] jener in [Fo2, §7, p. 87 - 92] vor. Entscheiden Sie sich bitte für eine Variante und arbeiten diese durch. Jeder nach seiner Façon!

Die zweite Ableitung[1]

Seien V, W Banachräume[2], $U \subset V$ offen und $f : U \to W$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Darunter verstehen wir, daß die erste Ableitung

$$df : U \to \mathcal{L}(V, W)$$

mit Werten in dem Banachraum $\mathcal{L}(V, W)$ (Hausaufgabe 4, Blatt 3) nochmals differenzierbar ist. Die Ableitung von df bezeichnen wir mit $d^2 f$ und dies ist dann eine Abbildung

$$d^2 f : U \to \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, W))\,.$$

Der zunächst kompliziert aussehende Raum $\mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, W))$ ist von einfacherer Natur als zunächst ersichtlich. Schnell verifiziert man, daß mittels

$$\mathcal{L}_2(V, V; W) \to \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, W)), \quad B \mapsto T_B$$
$$T_B(v_1)(v_2) := B(v_1, v_2)$$

ein Isomorphismus von Banachräumen gegeben wird. Ist speziell $W = \mathbb{R}$, so ist die zweite Ableitung also nichts anderes als eine Bilinearform $d^2 f(x) \in \mathcal{L}_2(V, V; \mathbb{R})$. Ist weiter f zweimal stetig partiell differenzierbar, so besagt der Satz von Schwarz, daß $d^2 f(x)$ eine symmetrische Bilinearform ist, alias

$$d^2 f(x)(v_1, v_2) = d^2 f(x)(v_2, v_1) \qquad (v_1, v_2 \in V)\,.$$

Schliesslich erwähnen wir noch die elementare Identität (versuchen Sie sich bitte im Nachweis)

$$d^2 f(x)(v_1, v_2) = \partial_{v_1} \partial_{v_2} f(x)\,.$$

Für $V = \mathbb{R}^n$ dürfen wir demnach die 2. Ableitung einer Funktion $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ als eine symmetrische $n \times n$-Matrix

$$\operatorname{Hess} f(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{1 \leq, i, j \leq n}\,,$$

die sogenannten *Hesse-Matrix*, interpretieren. Taylorapproximation in zweiter Ordnung für ein $f \in C^2(U)$ formuliert sich nun griffig zu

$$f(p + v) = f(p) + \langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle + \frac{1}{2} \langle \operatorname{Hess} f(x) v, v \rangle + R(v)$$

mit $\lim_{v \to 0} \frac{R(v)}{\|v\|^2} = 0$.

[1] Dies ist ein etwas anspruchsvollerer Text, der sich nach [Dieudonné, 8.12] richtet und von Ihnen noch nicht im Detail verstanden werden muss.

[2] Sie verlieren nichts, wenn Sie zunächst V und W als endlichdimensional annehmen.