Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

9. Anleitung zum Selbststudium

(KW25)

Die Themen der Woche sind: Untermannigfaltigkeiten via Kartenabbildungen [S2, §3.4 p. 68 - 72], Extrema unter Nebenbedingungen (Lagrange-Multiplikatoren) [S2, §3.5, p. 73 - 76] sowie Tangential - und Normalenraum [M, §10.12 - 10.13].

Unsere nächste Wanderung findet am 20. Juni statt; Ort, Zeit und Ziel werden in der Vorlesung bekannt gegeben. Die Teilnehmerzahl ist auf $10 + \delta$ begrenzt und was unter δ zu verstehen ist erschließen Sie sich aus einer weltberühmten Definition unseres hiesigen *primus omnium*[1].

Auch darf der Humor in der seltsamen Zeit nicht zu kurz kommen; allerdings, damit dieser abgründige Witz nicht zur Wirklichkeit wird, empfehle ich besonders herzhaftes Lachen und weitmöglichste Verbreitung.

Internationale Selbsteinschätzung

Um in eine Graduiertenschule im Ausland aufgenommen zu werden, bedarf es mitunter einer Aufnahmeprüfung. In den Vereinigten Staaten ist dies der GRE-Test (**G**raduate **R**ecord **E**xamination), ein Test mit 66 Fragen, für den Sie 2h50min Zeit haben. Hier ist ein Beispiel.

Wiederholung: Untermannigfaltigkeiten

Ich erinnere an die Definition einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ via lokaler Plättungen. Überprüfen Sie Ihr Verständnis:

1. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt *diskret*, falls zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung U von p existiert mit $M \cap U = \{p\}$. Teilmengen von diskreten Mengen sind diskret und das Standardbeispiel einer diskreten Menge ist das cartesische Koordinatengitter $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie nun: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn sie diskret ist.

2. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn sie offen und nicht leer ist.

3. Warum ist ein abgeschlossener und nicht leerer Quader $Q := \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$? Weshalb auch keine abgeschlossene Kugel?

[1] Karl Weierstraß maturierte 1834 am Theodoranium zu Paderborn.

Eine effiziente Methode, um eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ als Untermannigfaltigkeit zu erkennen, war der Satz des regulären Wertes. Wir betrachten das Beispiel des Doppelkegels (in der Physik *Lichtkegel*)

$$K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3^2 = x_2^2 + x_1^2\}$$

im $\mathbb{R}^3$. Wir setzen $K^\times := K \setminus \{0\}$ und $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Bearbeiten Sie nun folgende Aufgabenstellung:

1. Zeichnen Sie K. *Tipp: Erkennen Sie die Rotationssymmetrie um die x_3-Achse, dem Stundenglas ganz ähnlich.*

2. Weisen Sie nach, daß $K^\times$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. *Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_3^2 - x_2^2 - x_1^2$ und erkennen Sie weiter $K^\times = f^{-1}(\{0\})$ als Urbild eines regulären Wertes von f.*

3. K ist **keine** 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Intuitiv ersehen Sie aus Ihrer Skizze, daß der Nullpunkt $p = (0,0,0)^T \in K$ eine Sonderstellung einnimmt: Hier stossen die beiden Kegel an ihren Spitzen zusammen und man spricht von einem *singulären* Punkt – ein Terminus, der in einer Vorlesung über algebraische Geometrie präzisiert werden wird.

   Hinweise: Sei $B := B_r(p)$ die offene Kugel um den Nullpunkt p. Zeigen Sie, daß $B \cap K^\times$ in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt, andererseits aber eine offene und zusammenhängende Teilmenge V des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, durch Entfernung eines Punktes $q \in V$ zusammenhängend bleibt. Weiter, da eine lokale Plättung homöomorph aufs Bild ist, erhält sie insbesondere die Anzahl der Zusammenhangskomponenten.

Untermannigfaltigkeiten II: [S2, p. 68 - 72]

Wir beginnen mit [S2, Prop. 3.4.1].

Satz/Definition. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine stetig differenzierbare Abbildung $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ von einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^n$ gibt derart, daß gilt:*

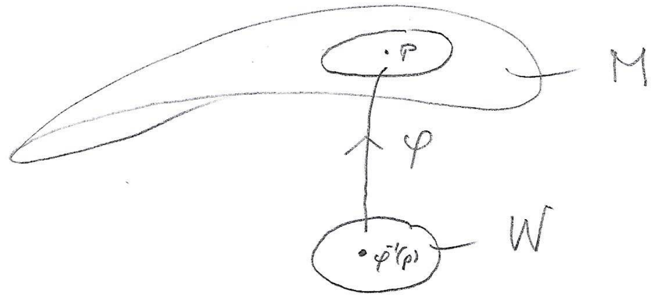
1. *$\phi(W)$ ist enthalten in M und offen in M und enthält p,*

2. *$d\phi(x)$ ist injektiv für alle $x \in W$,*

3. *ϕ ist injektiv und $\phi^{-1} : \phi(W) \to W$ ist stetig.*

Das Paar (W, ϕ) mit den Eigenschaften (1) - (3) nennt man eine Karte der Untermannigfaltigkeit M.

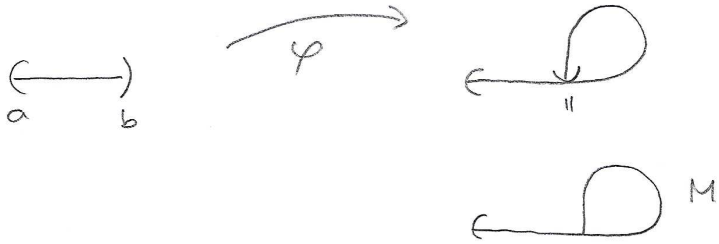
Bilder sagen oft mehr als tausend Worte:



Zeigt eine Karte für die Haube oder Pilzschirm.

Wichtig ist auch

Soergel's Schnecke [S2, p. 69]



welche <u>keine</u> Untermannigfaltigkeit ist, da φ^{-1} nicht stetig ist.

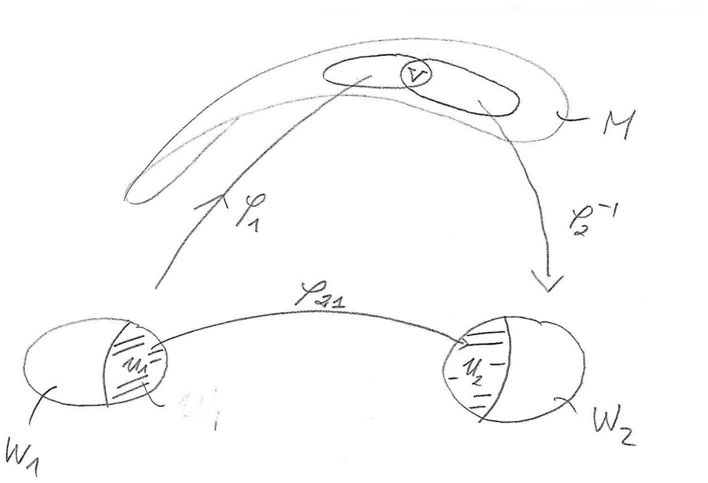
Ich kann es nur nochmals betonen: Die Forderung nach der Stetigkeit der inversen Karte ϕ^{-1} in (3) ist ein subtiler Punkt – wenn Sie erkennen, an welcher Stelle diese Eigenschaft in den Beweis eingeht, dann haben Sie viel verstanden, siehe auch das Bild [S2, p. 71] zum Beweis vom [S2, Prop. 3.4.1].

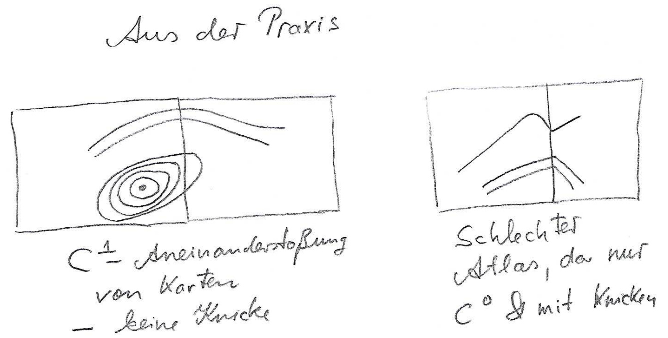
Um eine Untermannigfaltigkeit global zu beschreiben, reicht eine Karte oft nicht aus: Den Globus können Sie eben nicht plan aufs Papier bringen, ohne ein Abrißkante in Kauf zu nehmen. Das bringt uns zu der Definition eines Atlas': Ein Familie von Karten $\mathcal{A} = \{(W_i, \phi_i) : i \in I\}$ einer Untermannigfaltigkeit M heißt *Atlas*, falls

$M = \bigcup_{i \in I} \phi_i(W_i)$. In anderen Worten, ein Atlas ist ein System von Karten, welche das Objekt M ganz überdecken.
Nun ist es Natur der Sache, daß sich Karten oft überlappen[2], i.e. man muß einen Kartenwechsel vornehmen. Mathematisch nimmt sich dies wie folgt aus: Wir haben zwei Karten $\phi_1 : W_1 \to M$ und $\phi_2 : W_2 \to M$ und überlappen bedeutet $V = \phi_1(W) \cap \phi_2(W) \neq \varnothing$. Ist das der Fall, so ist das Überlappungsgebiet V eine offene und nicht leere Teilmenge in M. Setzen wir $U_i := \phi_i^{-1}(V)$, so nennen wir die Abbildung

$$\phi_{21} : U_1 \to U_2, \quad x \mapsto \phi_2^{-1}(\phi_1(x))$$

den *Kartenwechsel* von (ϕ_1, W_1) nach (ϕ_2, W_2). Die obligatorische Skizze ist:





[2]Als Doktorand in Erlangen habe ich mir vom Bayerischen Vermessungsamt alle 1:25000 noch handgezeichnete Karten meiner Umgebung besorgt, diese oft nebeneinander ausgebreitet und stundenlang betrachtet. Raus in die Natur ging es dann ohne Karte; es ist der Abgleich der zwei Welten, den ich so spannend finde. Noch interessanter wird es dann, wenn man einen Abzweig zu früh oder zu spät nimmt – daß man sich nur scheinbar verläuft, ist die spätere Erkenntnis.

Das Studium physischer Karten kann ich Ihnen nur empfehlen; es hat eine ganz andere, meditative Qualität, und steht in willkommener Kontraposition zum praktischen, doch seelenlosen elektronischen Krimskrams. Wenn Sie mal nach Amsterdam kommen, so lohnt sich ein Besuch im Scheepvartsmuseum: Bewundern Sie die Kunst der holländischen Kartenmacher und ihrer Globen.

Da wir Untermannigfaltigkeiten im C^1-Kontext definiert haben (andere Varianten wie C^k sind üblich, doch nur drei Werte von k sind wirlich relevant: $0, 1, \infty$), nimmt es nun auch nicht Wunder, daß auch die Kartenwechsel wieder C^1 sind [S2, Prop. 3.4.7].
Abrundend zum Thema sei erwähnt, daß das Konzept eines Atlas' sich leicht abstrahiert und natürlich zu dem Begriff der *Mannigfaltigkeit* heranführt, siehe [M, Def. 10.46].

Extrema auf Untermannigfaltigkeiten

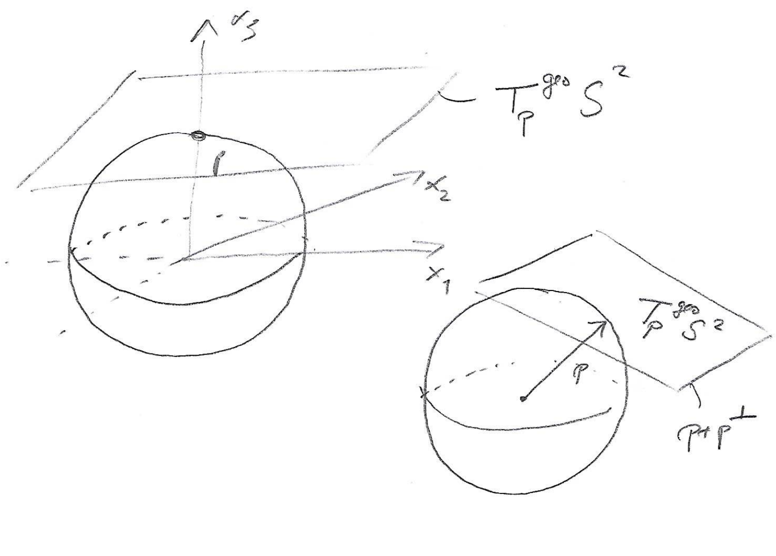
Die Abhandlung in [S2, §3.5] ist gut lesbar und erfordert keinen weiteren Kommentar. Eine Alternative dazu wäre die Darstellung in [M, §10.15] mit [M, §10.13] im Vorlauf.

Der Tangentialraum

Betrachten wir einführend die Sphäre $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $p = \mathbf{e}_3$ den Nordpol. Der *geometrische Tangentialraum* wäre dann die affine Hyperebene

$$T_p^{\text{geo}} S^2 = p + p^\perp = p + \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, x\rangle = 0\} = p + [\mathbb{R}\mathbf{e}_1 + \mathbb{R}\mathbf{e}_2]\,,$$

i.e. die um p verschobene $x_1 x_2$-Ebene. Schnell erkennen Sie, daß diese Formel für jeden Punkt $p \in M$ gültig ist.



Weiter, auf dieses Beispiel der Sphäre bezogen, wäre der Tangentialraum $T_p S^2$ gegeben als der 2-dimensionale Unterraum $T_p S^2 = p^\perp \subset \mathbb{R}^3$, i.a. W. wir unterdrücken die affine Verschiebung um den Aufpunkt p.
Die formale Definition eines Tangentialraums ist wie folgt, siehe [M, Def. 10.51]:

Definition. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und $p \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt* <u>*Tangentialvektor*</u> *an M in p, wenn es eine C^1-Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ gibt mit:*

- $\gamma\left((-\epsilon, \epsilon)\right) \subset M$,
- $\gamma(0) = p$,
- $\gamma'(0) = v$.

Die Menge der Tangentialvektoren an M in p nennt man Tangentialkegel T_pM von M in p. Falls T_pM ein Vektorraum ist, so heißt T_pM Tangentialraum an M in p.

Bemerkung. *Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ nennt man Kegel, falls $\lambda K = K$ für alle $\lambda > 0$. Ist nun $v \in T_pM$ ein Tangentialvektor an M, implementiert durch eine Kurve γ, so ist auch $\lambda v \in T_pM$, da implementiert durch die reskalierte Kurve $\tilde{\gamma} : (-\frac{\epsilon}{\lambda}, \frac{\epsilon}{\lambda}) \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \gamma(\lambda t)$.*

Aufgabe. Der Tangentialraum bei $p = 0$ an den Doppelkegel $K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3^2 = x_1^2 + x_2^2\}$ ist der Doppelkegel selbst, i.e. $T_0K = K$.

Zentral ist nun der folgende Satz, siehe [M, Satz 10.52].

Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gilt:*

1. *T_pM ist ein k-dimensionaler Unterraum; genauer: ist (W, ϕ) eine Karte um p und $q := \phi^{-1}(p) \in W$, so gilt $T_pM = \operatorname{Bild} d\phi(q) = d\phi(q)(\mathbb{R}^k)$.*
2. *Ist $M = f^{-1}(c) \subset U \subset \mathbb{R}^n$ das Urbild eines regulären Wertes einer C^1-Abbildung $f = (f_1, \dots, f_{n-k})^T : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, so gilt*
$$T_pM = \ker df(p)\,.$$

Versuchen Sie bitte zuerst die Aussage dieses Satzes zu verstehen und gucken Sie sich erst die Beispiele in [M, p. 234 - 235] an. Wenn Sie nun zum Beweis in [M] schreiten, so beachten Sie bitte, daß Müller einen anderen Kartenbegriff wie Soergel verwendet – siehe auch dazu den langen Kommentar [S2, 3.4.5]. Lesen Sie nun [M, §10.13] zu Ende.

Der Normalenraum

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$, so nennt man

$$N_pM := (T_pM)^\perp$$

den *Normalenraum* bei p.

Beispiel. *$N_p\mathbb{S}^n = \mathbb{R}p$ für alle $p \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

Lesen Sie nun [M, Satz 10.57] mit Beweis.