Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

1. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 1.1 Gegeben seien zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_a^b xe^{-x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_a^b xe^{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_a^b x^3e^{x}\,dx$

Präsenzaufgabe 1.2 Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(x)\sin^3\, dx.$$

Präsenzaufgabe 1.3

(a) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

(b) Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.$$

(c) Folgern Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

Präsenzaufgabe 1.4 Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen. Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hinweis: Für Treppenfunktionen sollte die Ungleichung bekannt sein.

Hausaufgabe 1.1 Für $p \in [1, \infty)$ und eine Regelfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ sei

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(a) Seien $p, q \in [1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie die Höldersche Ungleichung: Für alle Regelfunktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

(b) Sei $p \in [1, \infty)$. Beweisen Sie die Minkowskische Ungleichung: Für alle Regelfunktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Hausaufgabe 1.2 Folgern Sie mit Hilfe der partiellen Integrationsregel für jedes $n \in \mathbb{N}$:

(a) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so gilt

$$\int f(x)^n f'(x) \, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}.$$

(b) Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbare Funktionen, so gilt

$$\int f(x) g^{(n)}(x) \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)}(x) g^{(n-k-1)}(x) + (-1)^n \int f^{(n)}(x) g(x) \, dx.$$

Hausaufgabe 1.3 Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-2)^3} \, dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^4(x)} \, dx$.

Hausaufgabe 1.4 Untersuchen Sie die folgenden uneigentliche Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \log\left(\frac{1+x}{x}\right) dx$,

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 10.4.2020, 10 Uhr im Postfach auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe. Die Abgabefrist für die Hausaufgaben verlängert sich gegebenenfalls bis zum Ende jener Kalenderwoche, in welcher Ihnen der Zutritt zur Universität wieder gestattet ist.