Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

10. Übungsblatt

Hausaufgabe 10.1 Wir definieren für $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

von ϕ als

$$\mathcal{F}\phi(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

(a) Beweisen Sie, dass für alle $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\mu \in \mathbb{N}_0^n$

$$\mathcal{F}\big(\partial^\mu \phi\big)(\xi) = (i\xi)^\mu\, \mathcal{F}\phi(\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n),$$

wobei

$$(y)^\mu := y_1^{\mu_1} \cdots y_n^{\mu_n} \qquad (y \in \mathbb{R}^n).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}\big(A^*\phi\big) = \frac{1}{|\det(A)|}\big((A^{-1})^t\big)^* \mathcal{F}(\phi),$$

wobei * das Zurückziehen bezeichnet.

(c) Seien $\phi, \psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren die Faltung $\phi * \psi$ von ϕ und ψ durch

$$\phi * \psi(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\psi(y)\, dy \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Beweisen Sie die Identität

$$\mathcal{F}(\phi * \psi) = \mathcal{F}\phi\, \mathcal{F}\psi.$$

Lösung:

(a) Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wenn $1 \leq j \leq n$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, dann

$$\mathcal{F}(\partial_j\phi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j\phi(x) e^{-\langle x, \xi\rangle}\, dx = \int_{\mathbb{R}^{j-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-j}} \int_{\mathbb{R}} \partial_j \phi(u, x_j, v) e^{-i\langle (u, x_j, v), \xi\rangle}\, dx_j\, dv\, du.$$

Jetzt wenden wir partielle Integration auf dem inneren Integral an un bekommen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \partial_j \phi(u, x_j, v) e^{-i\langle (u, x_j, v), \xi\rangle}\, dx_j &= -\int_{\mathbb{R}} \phi(u, x_j, v) \partial_j e^{-i\langle (u, x_j, v), \xi\rangle}\, dx_j \\ &= i\xi_j \int_{\mathbb{R}} \phi(u, x_j, v) e^{-i\langle (u, x_j, v), \xi\rangle}\, dx_j\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\partial_j\phi)(\xi) &= i\xi_j \int_{\mathbb{R}^{j-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-j}} \int_{\mathbb{R}} \phi(u, x_j, v) e^{-i\langle (u, x_j, v), \xi\rangle}\, dx_j\, dv\, du \\ &= i\xi_j \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-i\langle x, \xi\rangle}\, dx = i\xi_j \mathcal{F}\phi(\xi).\end{aligned}$$

Wenn $\mu \in \mathbb{N}_0^n$, dann liefert wiederholte Anwendung dieser Identität

$$\mathcal{F}(\partial^\mu\phi)(\xi) = (i\xi)^\mu \mathcal{F}\phi(\xi).$$

(b) Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n$. Nach der Transformationsformel gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} A^*\phi(x)e^{-i\langle \xi, x\rangle}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(Ax)e^{-i\langle \xi, x\rangle}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\det(A^{-1})|\phi(y)e^{-i\langle \xi, A^{-1}x\rangle}\,dy \\
&= \frac{1}{|\det(A)|}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)e^{-i\langle (A^{-1})^t\xi, x\rangle}\,dy.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathcal{F}(A^*\phi) = \frac{1}{|\det(A)|}\big((A^{-1})^t\big)^*\mathcal{F}(\phi).$$

(c) Seien $\phi, \psi \in \mathbb{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\phi * \psi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi * \psi(x)e^{-i\langle x, \xi\rangle}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\psi(y)e^{-i\langle x, \xi\rangle}\,dy\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\psi(y)e^{-i\langle x, \xi\rangle}\,d(x,y)
\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto (x - y, y).$$

Die Abbildung Φ ist linear und bijektiv. Damit ist es ein C^1-Diffeomorphismus. Es gilt

$$\det D\Phi(x, y) = \det\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = 1 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\big).$$

Wir definieren

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \phi(x)\psi(y)e^{-i\langle x+y, \xi\rangle}$$

Nach der Transformationsformel gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\psi(y)e^{-i\langle x, \xi\rangle}\,d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} (f\circ\Phi)(x,y)\det D\Phi(x,y)\,d(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\psi(y)e^{-i\langle x, \xi\rangle}e^{-i\langle y, \xi\rangle}\,dx\,dy \\
&= \mathcal{F}\phi(\xi)\mathcal{F}\psi(\xi).
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 10.2

(a) Beweisen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2}\,dx = \pi.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt\right)^n.$$

Folgern Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, dx = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

Lösung:

(a) Wir verwenden Polarkoordinaten. Nach der Transformationsformel gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2}\, dx = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} re^{-r^2}\, d\phi\, dr = 2\pi\big(\frac{-1}{2}e^{-r^2}\big)\big|_{r=0}^\infty = \pi.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$e^{-\|x\|^2} = e^{-\sum_{k=1}^n x_k^2} = e^{-x_1^2} \dots e^{-x_n^2}$$

und darum

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} \dots e^{-x_n^2}\, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}\, dx_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2}\, dx_n \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt\right)^n.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, dx = \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|y\|^2}\, dy\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Nach (a) ist die rechte Seite gleich $\pi^{\frac{n}{2}}$.

Hausaufgabe 10.3 Sei $U = (0,1)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie

$$\int_U e^{x_1^2+x_2^2-x_1^2x_2^2}\sqrt{1-x_1^2}\, dx$$

Lösung: Wir definieren die Abbildung $\Phi : (-1,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \big(x_1, x_2\sqrt{1-x_1^2}\big)$.
Es gilt

$$\det D\Phi(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x_1x_2}{\sqrt{1-x_1^2}} & \sqrt{1-x_1^2} \end{pmatrix} = \sqrt{1-x_1^2}.$$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\|x\|^2}$. Nach der Transformationsformel gilt

$$I := \int_U e^{x_1^2+x_2^2-x_1^2x_2^2}\sqrt{1-x_1^2}\, dx = \int_U f \circ \Phi(x) \det D\Phi(x)\, dx = \int_{\Phi(U)} f(y)\, dy.$$

Es gilt

$$\Phi(U) = \{(x_1, x_2\sqrt{1-x_1^2}) : x_1, x_2 \in (0,1)\} = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 > 0, y_2 > 0 \text{ und } y_1^2+y_2^2 < 1\}.$$

Wir verwenden jetzt Polarkoordinaten und bekommen

$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{r^2}\, d\phi\, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^1 re^{r^2}\, dr = \frac{\pi}{4}(e-1).$$

Hausaufgabe 10.4 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige kompakt getragene Funktion, sodass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1.$$

Wir definieren für $\epsilon > 0$ die Funktion $f_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} f\big(\frac{1}{\epsilon}x\big) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon > 0$

$$\operatorname{supp}(f_\epsilon) = \epsilon \operatorname{supp}(f) := \{\epsilon x : x \in \operatorname{supp}(f)\}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x)\,dx = 1.$$

(b) Beweisen Sie, dass für alle stetige Funktionen $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x)\phi(x)\,dx = \phi(0).$$

Lösung:

(a) Sei $\epsilon > 0$. Es gilt

$$\operatorname{supp}(f_\epsilon) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f\big(\frac{1}{\epsilon}x\big) \neq 0\}} = \overline{\epsilon\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}} = \epsilon \operatorname{supp}(f).$$

Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \epsilon^{-1}x$ ist linear und invertierbar. Damit ist sie C^1. Es gilt $\det \Phi(x) = \epsilon^{-n}$. Nach der Transformationsregel gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-n} f(\epsilon^{-1}x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx. = 1.$$

(b) Sei $\eta > 0$. Wir werden beweisen, dass es ein $r > 0$ gibt, sodass für alle $0 < \epsilon < r$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x)\phi(x)\,dx - \phi(0) \right| < \eta.$$

Weil $\int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x)\,dx = 1$, gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x)\phi(x)\,dx - \phi(0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x)\big(\phi(x) - \phi(0)\big)\,dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x)\big|\phi(x) - \phi(0)\big|\,dx.$$

Sei $\rho > 0$, sodass $\operatorname{supp}(f) \subseteq B(\rho) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \rho\}$. Aus (a) folgt $\operatorname{supp}(f_\epsilon) \subseteq B(\epsilon\rho)$ und darum

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x)\big|\phi(x) - \phi(0)\big|\,dx = \int_{B(\epsilon\rho)} f_\epsilon(x)\big|\phi(x) - \phi(0)\big|\,dx.$$

Sei $\eta > 0$. Es gibt ein $\delta > 0$, sodass $\big|\phi(x) - \phi(0)\big| < \eta$ für alle $x \in B(\delta)$. Sei $r = \frac{\delta}{\rho}$. Wenn $0 < \epsilon < r$, dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x)\big|\phi(x) - \phi(0)\big|\,dx \leq \eta \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x)\,dx = \eta.$$