Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

11. Übungsblatt

Für $n \in \mathbb{N}$ und $r > 0$, sei $S^{n-1}(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$ die $(n-1)$-Sphäre mit Radius r. Wir schreiben S^{n-1} für $S^{n-1}(1)$. Wir definieren die Abbildung $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s}\, ds \qquad (t > 0).$$

Präsenzaufgabe 11.1

(a) Beweisen Sie für jede Funktion $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-1} \phi(r\omega)\, d\omega\, dr.$$

Hier bezeichnet $d\omega$ das Flächenmaß auf S^{n-1}.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, dx = \frac{1}{2} \mathrm{vol}(S^{n-1}) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

(c) Beweisen Sie die Identität

$$\mathrm{vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

(d) Beweisen Sie für alle $t > 0$ die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t).$$

Beweisen Sie weiter, dass

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{und} \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Diese Formeln bestimmen $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Präsenzaufgabe 11.2

(a) Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Nehmen Sie an, dass es eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine C^1-Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt, sodass $M = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^n$. (Jede Untermannigfaltigkeit kann lokal als ein Graph dargestellt werden; Satz 2 in Kapitel I.9 in Forster 2.) Geben Sie eine Formel für das k-Volumen von M als ein Integral über U. Untersuchen Sie speziell den Fall $k = n - 1$.

(b) Schreiben Sie $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ als Vereinigung von Graphen von C^1-Funktionen und berechnen Sie damit das 2-Volumen von S^2.

Hausaufgabe 11.1 Sei Γ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, sodass $\Gamma \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \{0\} \times \mathbb{R}$. Sei M die Drehfläche von Γ um die z-Achse, dass heißt die Fläche die durch Rotation von Γ um die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entsteht. Nehmen Sie an, dass $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ eine Karte ist von Γ, das heißt, dass γ eine injektive C^1-Kurve $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ ist, sodass $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$, $\gamma^{-1} : \Gamma \to (a, b)$ stetig ist und $\Gamma = \mathrm{Im}(\gamma)$.

(a) Geben Sie ein Formel für das 2-Volumen von M. Betrachten Sie dazu die Abbildung

$$f : (a, b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (t, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos(\phi) \\ \gamma_1(t)\sin(\phi) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$$

(b) Sei $\phi \in C_c(\mathbb{R}^3)$. Schreiben Sie $\int_M \phi(x)\, dx$ als Integral über $(a, b) \times (0, 2\pi)$. Hier bezeichnet dx das Flächenmaß auf M.

(c) Betrachten Sie die 2-dimensionale Sphäre S^2 als Drehfläche und berechnen Sie damit das 2-Volumen.

(d) Betrachten Sie den Teil $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = -1, 0 < x_3 < 1\}$ des Hyperboloids als Drehfläche und berechnen Sie damit $\int_M x_3\, dx$.

Hausaufgabe 11.2 Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine einschachtelbare Menge mit Volumen $\mathrm{vol}(E) = V > 0$. Sei $h \in \mathbb{R}_+$. Betrachten Sie die Menge

$$M := \left\{ \left(\frac{(h-t)}{h} x, t \right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in E, 0 \leq t \leq h \right\}.$$

(a) Skizzieren Sie M für $n = 2$.

(b) Bestimmen Sie das Volumen von M. Benützen Sie dazu das Prinzip von Cavalieri.

(c) Sei jetzt $n = 2$, $a \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$. Bestimmen Sie das Volumen von M, wenn $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < r\}$.