Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

11. Übungsblatt

Hausaufgabe 11.1 Sei Γ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, sodass $\Gamma \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \{0\} \times \mathbb{R}$. Sei M die Drehfläche von Γ um die z-Achse, dass heißt die Fläche die durch Rotation von Γ um die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entsteht. Nehmen Sie an, dass $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ eine Karte ist von Γ, das heißt, dass γ eine injektive C^1-Kurve $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ ist, sodass $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$, $\gamma^{-1} : \Gamma \to (a,b)$ stetig ist und $\Gamma = \mathrm{Im}(\gamma)$.

(a) Geben Sie ein Formel für das 2-Volumen von M. Betrachten Sie dazu die Abbildung

$$f : (a,b) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (t,\phi) \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos(\phi) \\ \gamma_1(t)\sin(\phi) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$$

(b) Sei $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^3)$. Schreiben Sie $\int_M \varphi(x)\,dx$ als Integral über $(a,b) \times (0,2\pi)$. Hier bezeichnet dx das Flächenmaß auf M.

(c) Betrachten Sie die 2-dimensionale Sphäre S^2 als Drehfläche und berechnen Sie damit das 2-Volumen.

(d) Betrachten Sie den Teil $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = -1, 0 < x_3 < 1\}$ des Hyperboloids als Drehfläche und berechnen Sie damit $\int_M x_3\,dx$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$Df(t,\phi) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t)\cos(\phi) & -\gamma_1(t)\sin(\phi) \\ \gamma_1'(t)\sin(\phi) & \gamma_1(t)\cos(\phi) \\ \gamma_3'(t) & 0 \end{pmatrix}$$

und darum

$$\begin{aligned}
&\det\Big(Df(t,\phi)^t Df(t,\phi)\Big) \\
&\quad = \det\begin{pmatrix} \gamma_1'(t)\cos(\phi) & \gamma_1'(t)\sin(\phi) & \gamma_3'(t) \\ -\gamma_1(t)\sin(\phi) & \gamma_1(t)\cos(\phi) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1'(t)\cos(\phi) & -\gamma_1(t)\sin(\phi) \\ \gamma_1'(t)\sin(\phi) & \gamma_1(t)\cos(\phi) \\ \gamma_3'(t) & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad = \det\begin{pmatrix} \|\gamma'(t)\|^2 & 0 \\ 0 & \gamma_1(t)^2 \end{pmatrix} \\
&\quad = \|\gamma'(t)\|^2\gamma_1(t)^2.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\mathrm{vol}_2(M) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \sqrt{\|\gamma'(t)\|^2\gamma_1(t)^2}\,d\phi\,dt = 2\pi \int_a^b \|\gamma'(t)\|\gamma_1(t)\,dt$$

(b) Wir benützen die Formel für $\det\big(Df(t,\phi)^t Df(t,\phi)\big)$ aus (a). Es gilt

$$\begin{aligned}\int_M \varphi(x)\,dx &= \int_a^b\int_0^{2\pi}\sqrt{\det\big(Df(t,\phi)^t Df(t,\phi)\big)}\varphi\big(f(t,\phi)\big)\,d\phi\,dt\\ &= \int_a^b\int_0^{2\pi}\varphi\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\cos(\phi)\\ \gamma_1(t)\sin(\phi)\\ \gamma_3(t)\end{pmatrix}\|\gamma'(t)\|\gamma_1(t)\,d\phi\,dt\end{aligned}$$

(c) Sei

$$\gamma : \big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big)\to\mathbb{R}^3;\quad t\mapsto\begin{pmatrix}\cos(t)\\ 0\\ \sin(t)\end{pmatrix}.$$

Das Drehfläche von $\Gamma = \operatorname{Im}(\gamma)$ ist gleich $S^2\setminus\{(0,0,\pm1)\}$. Es gilt

$$\operatorname{vol}(S^2) = \operatorname{vol}\big(S^2\setminus\{(0,0,\pm1)\}\big) = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\|\gamma'(t)\|\gamma_1(t)\,dt = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,dt = 4\pi.$$

(d) Sei

$$\gamma : (0,1)\to\mathbb{R}^3;\quad t\mapsto\begin{pmatrix}\sqrt{1+t^2}\\ 0\\ t\end{pmatrix}.$$

Die Drehfläche von $\Gamma = \operatorname{Im}(\gamma)$ ist gleich M. Nach (b) gilt

$$\begin{aligned}\int_M x_3\,dx &= \int_0^1\int_0^{2\pi} t\left\|\begin{pmatrix}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\|\sqrt{1+t^2}\,d\phi\,dt\\ &= 2\pi\int_0^1 t\left\|\begin{pmatrix}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\|\sqrt{1+t^2}\,dt\\ &= 2\pi\int_0^1 t\sqrt{1+2t^2}\,dt\\ &= \frac{\pi}{3}(3\sqrt{3}-1).\end{aligned}$$

Hausaufgabe 11.2 Sei $E\subseteq\mathbb{R}^n$ eine einschachtelbare Menge mit Volumen $\operatorname{vol}(E) = V > 0$. Sei $h\in\mathbb{R}_+$. Betrachten Sie die Menge

$$M := \left\{\left(\frac{(h-t)}{h}x, t\right)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} : x\in E, 0\le t\le h\right\}.$$

(a) Skizzieren Sie M für $n=2$.

(b) Bestimmen Sie das Volumen von M. Benützen Sie dazu das Prinzip von Cavalieri.

(c) Sei jetzt $n=2$, $a\in\mathbb{R}^2$ und $r>0$. Bestimmen Sie das Volumen von M, wenn $E = \{x\in\mathbb{R}^2 : \|x-a\| < r\}$.

Lösung:

(b) Für $0 \leq t \leq h$ definieren wir M_t als

$$M_t := \frac{(h-t)}{h} E.$$

Dann

$$\mathrm{vol}_n(M_t) = \left(\frac{(h-t)}{h}\right)^n \mathrm{vol}(E) = \left(\frac{(h-t)}{h}\right)^n V.$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri gilt

$$\mathrm{vol}_{n+1}(M) = \int_0^h \mathrm{vol}_n(M_t)\, dt = \int_0^h \left(\frac{(h-t)}{h}\right)^n V\, dt = \frac{hV}{n+1}$$

(c) Wenn $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x-a\| < r\}$, dann $\mathrm{vol}_2(E) = \pi r^2$. Nach (b) gilt

$$\mathrm{vol}_3(M) = \frac{h\pi r^2}{3}.$$