Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

11. Übungsblatt

Für $n \in \mathbb{N}$ und $r > 0$, sei $S^{n-1}(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$ die $(n-1)$-Sphäre mit Radius r. Wir schreiben S^{n-1} für $S^{n-1}(1)$. Wir definieren die Abbildung $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s}\, ds \qquad (t > 0).$$

Präsenzaufgabe 11.1

(a) Beweisen Sie für jede Funktion $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-1} \phi(r\omega)\, d\omega\, dr.$$

Hier bezeichnet $d\omega$ das Flächenmaß auf S^{n-1}.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, dx = \frac{1}{2} \mathrm{vol}(S^{n-1}) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

(c) Beweisen Sie die Identität

$$\mathrm{vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

(d) Beweisen Sie für alle $t > 0$ die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t).$$

Beweisen Sie weiter, dass

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{und} \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Diese Formeln bestimmen $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ eine offene Teilmenge und sei $\kappa : U \to S^{n-1}$ eine Karte von S^{n-1} mit dichtem Bild. Dann ist die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}_{>0} \times U \to \mathbb{R}^n; \quad (r, x) \mapsto r\kappa(x)$$

ein C^1-Diffeomorphismus auf ein offene und dichte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Für alle $1 \leq i \leq n-1$ gilt, dass $\partial_{x_i}\Phi(r, x)$ erhalten ist in dem Tangentialraum von $S^{n-1}(r)$. Da

$$T_\omega S^{n-1}(r) = \omega^\perp \qquad \big(\omega \in S^{n-1}(r)\big)$$

gilt

$$\langle \partial_{x_i}\Phi(r, x), \kappa(x)\rangle = 0 \qquad (1 \leq i \leq n, r > 0, x \in U)$$

oder, äquivalent dazu

$$D_x\Phi(r,x)^t\kappa(x) = 0 \qquad (r>0, x\in U).$$

Weil

$$D\Phi(r,x) = \left(\begin{array}{c:c} \kappa(x) & D_x\Phi(r,x) \end{array}\right)$$

folgt

$$\begin{aligned}
D\Phi(r,x)^t D\Phi(r,x) &= \left(\begin{array}{c} \kappa(x)^t \\ \hdashline D_x\Phi(r,x)^t \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c} \kappa(x) & D_x\Phi(r,x) \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c:c} \kappa(x)^t\kappa(x) & \kappa(x)^t D_x\Phi(r,x) \\ \hdashline D_x\Phi(r,x)^t\kappa(x) & D_x\Phi(r,x)^t D_x\Phi(r,x) \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & D_x\Phi(r,x)^t D_x\Phi(r,x) \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Weiter gilt $D_x\Phi(r,x) = rD\kappa(x)$ und darum

$$D\Phi(r,x)^t D\Phi(r,x) = \left(\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & r^2 D\kappa(x)^t D\kappa(x) \end{array}\right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\det\Big(D\Phi(r,x)\Big)^2 &= \det\Big(D\Phi(r,x)^t D\Phi(r,x)\Big) \\
&= \det \left(\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & r^2 D\kappa(x)^t D\kappa(x) \end{array}\right) \\
&= r^{2(n-1)} \det\Big(D\kappa(x)^t D\kappa(x)\Big).
\end{aligned}$$

Sei $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Nach der Transformationsformel gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx &= \int_0^\infty \int_U \phi\big(r\kappa(x)\big) |\det D\Phi(r,x)|\,dx\,dr \\
&= \int_0^\infty \int_U \phi\big(r\kappa(x)\big) \sqrt{\det\Big(D\Phi(r,x)\Big)^2}\,dx\,dr \\
&= \int_0^\infty \int_U \phi\big(r\kappa(x)\big) r^{n-1} \sqrt{\det\Big(D\kappa(x)^t D\kappa(x)\Big)}\,dx\,dr \\
&= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \phi\big(r\omega\big) r^{n-1}\,d\omega\,dr.
\end{aligned}$$

(b) Sei $\theta \in C_c(\mathbb{R})$, sodass $0 \le \theta(r) \le 1$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und $\theta\big|_{B^n(1)} = 1$. Für alle $\epsilon > 0$ ist die Funktion $x \mapsto \theta(\epsilon\|x\|)e^{-x^2}$ ist kompakt getragen und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\,dx = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \theta(\epsilon\|x\|)e^{-\|x\|^2}\,dx.$$

Aus (a) folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, dx &= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-1}\theta(\epsilon r) e^{-\|r\|^2}\, d\omega\, dr \\
&= \int_{S^{n-1}} d\omega \int_0^\infty r^{n-1} e^{-\|r\|^2}\, dr \\
&= \operatorname{vol}(S^{n-1}) \int_0^\infty r^{n-1} e^{-\|r\|^2}\, dr.
\end{aligned}$$

Wir benützen jetzt nochmals die Transformationsformel und schreiben das Integral als ein Integral über $\rho = r^2$. Wir bekommen

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{vol}(S^{n-1}) \int_0^\infty \rho^{\frac{n}{2}-1} e^{-\rho}\, d\rho = \frac{1}{2}\operatorname{vol}(S^{n-1})\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Nach Hausaufgabe 10.2 ist $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, dx$ gleich $\pi^{\frac{n}{2}}$. Darum folgt

$$\operatorname{vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

(c) Sei $t > 0$. Wir verwenden partielle Integration und bekommen

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x}\, dx = -x^t e^{-x}\Big|_{x=0}^\infty + \int_0^\infty t x^{t-1} e^{-x}\, dx = t\Gamma(t).$$

Weiter gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_{x=0}^\infty = 1$$

und

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}.$$

Präsenzaufgabe 11.2

(a) Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Nehmen Sie an, dass es eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine C^1-Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt, sodass $M = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^n$. (Jede Untermannigfaltigkeit kann lokal als ein Graph dargestellt werden; Satz 2 in Kapitel I.9 in Forster 2.) Geben Sie eine Formel für das k-Volumen von M als ein Integral über U. Untersuchen Sie speziell den Fall $k = n - 1$.

(b) Schreiben Sie $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ als Vereinigung von Graphen von C^1-Funktionen und berechnen Sie damit das 2-Volumen von S^2.

Lösung:

(a) Wir benützen $\kappa : U \to M$, $x \mapsto (x, f(x))$ als Karte von M. Es gilt

$$D\kappa(x) = \begin{pmatrix} I_k \\ \hdashline Df(x) \end{pmatrix}$$

und darum

$$D\kappa(x)^t D\kappa(x) = \left(\begin{array}{c:c} I_k & Df(x)^t \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} I_k \\ \hdashline Df(x) \end{array} \right) = I_k + Df(x)^t Df(x).$$

Es folgt, dass

$$\operatorname{vol}(M) = \int_U \sqrt{\det\left(I_k + Df(x)^t Df(x)\right)}\, dx.$$

Wenn $k = n-1$, dann gilt

$$\operatorname{vol}(M) = \int_U \sqrt{\det\left(I_k + \operatorname{grad} f(x) \operatorname{grad} f(x)^t\right)}\, dx = \int_U \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} f(x)\|^2}\, dx.$$

(b) Sei $f_\pm : B^2(1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \pm\sqrt{1 - \|x\|^2}$. Dann ist

$$\bigcup_\pm \left\{\left(x, f_\pm(x)\right) : x \in B^2(1)\right\}.$$

eine offene und dichte Teilmenge von S^2. Es folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(S^2) &= \sum_\pm \int_{B^2(1)} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} f_\pm(x)\|^2}\, dx \\
&= 2 \int_{B^2(1)} \sqrt{1 + \left\| \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} x \right\|^2}\, dx \\
&= 2 \int_{B^2(1)} \sqrt{1 + \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|^2}}\, dx \\
&= 2 \int_{B^2(1)} \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}\, dx.
\end{aligned}$$

Jetzt setzen wir Polarkoordinaten ein und bekommen

$$\operatorname{vol}(S^2) = 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}\, d\phi\, dr = 4\pi.$$