Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

12. Übungsblatt

Für $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$B^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\} \quad \text{und} \quad S^{n-1}(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}.$$

Wir schreiben B^n und S^{n-1} für $B^n(1)$ und $S^{n-1}(1)$.

Präsenzaufgabe 12.1 Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0\}$ und sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$f(x) = \Big(\sinh(x_2) + 2x_1x_2^2, x_1^2x_2 + e^{\sin(x_1)+\cos(x_3)}, \frac{1}{3}x_3^3\Big).$$

Berechnen Sie

$$\int_M \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2}} \left\langle f(x), \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \right\rangle dx,$$

wobei dx das Flächenmaß auf M bezeichnet.

Präsenzaufgabe 12.2 Sei Δ der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$, das heißt Δ ist der partielle Differentialoperator gegeben durch

$$\Delta\phi = \sum_{k=1}^n \partial_k^2\phi \qquad \big(\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\big).$$

Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, sodass $\overline{\Omega}$ ein Kompaktum mit C^1-Rand ist. Wir definieren $\nu : \partial\Omega \to S^{n-1}$ als das äußere Einheitsnormalenfeld von Ω und schreiben dy für das Flächenmaß auf $\partial\Omega$. Seien $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(a) Beweisen Sie die erste Identität von Green

$$\int_\Omega g(x)\Delta f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} g(y)\big\langle \operatorname{grad} f(y), \nu(y)\big\rangle\, dy - \int_\Omega \big\langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x)\big\rangle\, dx.$$

(b) Beweisen Sie die zweite Identität von Green

$$\int_\Omega f(x)\Delta g(x) - g(x)\Delta f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f(y)\big\langle \operatorname{grad} g(y), \nu(y)\big\rangle - g(y)\big\langle \operatorname{grad} f(y), \nu(y)\big\rangle\, dy.$$

Präsenzaufgabe 12.3 Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren das Newton-Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n; \quad x \mapsto \frac{1}{\operatorname{vol}_{n-1}(S^{n-1})\|x\|^n}\, x.$$

(a) Zeigen Sie, dass f divergenzfrei auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist, das heißt

$$\operatorname{div} f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, sodass $\overline{\Omega}$ ein Kompaktum mit C^1-Rand ist und $0 \notin \partial\Omega$. Sei $\nu : \partial\Omega \to S^{n-1}$ das äußere Einheitsnormalenfeld. Beweisen Sie die Identität

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, \nu\rangle = \begin{cases} 1, & (0 \in \Omega) \\ 0, & (0 \notin \Omega). \end{cases}$$

Hausaufgabe 12.1 Sei $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$. Beweisen Sie die Identität

$$n \operatorname{vol}_n\big(B^n(r)\big) = r \operatorname{vol}_{n-1}\big(S^{n-1}(r)\big).$$

Betrachten Sie dazu das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad x \mapsto x$$

und verwenden Sie den Integralsatz von Gauß.

Hausaufgabe 12.2 Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, -1 < x_3 < 1\}$ und sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$f(x) = \big(x_1 x_2^2, x_1^2 x_2, x_3^3\big) \qquad (x \in \mathbb{R}^3).$$

(a) Berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenfeld ν von M.

(b) Wir schreiben dy für das Flächenmaß auf M. Berechnen Sie

$$\int_{\partial M} \big\langle f(y), \nu(y) \big\rangle \, dy$$

einmal direkt und einmal mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

Hausaufgabe 12.3 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $E : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$E = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\operatorname{vol}_{n-1}(S^{n-1})} \|\cdot\|^{2-n}, & (n \neq 2) \\[2ex] \frac{1}{2\pi} \log \circ \|\cdot\|, & (n = 2). \end{cases}$$

Wir schreiben Δ für den Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie

$$\Delta E(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\epsilon > 0$. Wir definieren $\phi_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^n(\epsilon)} E(y) f(x-y) \, dy.$$

(Vergleichen Sie diese Formel mit dem Faltungsprodukt.)

(b) Beweisen Sie, dass

$$\Delta \phi_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^n(\epsilon)} E(y) \Delta f(x-y) \, dy.$$

(c) Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Delta \phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \int_{S^{n-1}(\epsilon)} E(y) \big\langle \operatorname{grad} f(x-y), y \big\rangle + f(x-y) \big\langle \operatorname{grad} E(y), y \big\rangle \, dy.$$

Hinweis: Wählen Sie ein gutes Kompaktum Ω und verwenden Sie die zweite Idententität von Green.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} E(y)\big\langle \operatorname{grad} f(x-y), y\big\rangle\, dy = \epsilon^{n-1}\int_{S^{n-1}} E(\epsilon y)\big\langle \operatorname{grad} f(x-\epsilon y), y\big\rangle\, dy$$

und

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} f(x-y)\big\langle \operatorname{grad} E(y), y\big\rangle\, dy = \frac{1}{\operatorname{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}} f(x-\epsilon y)\, dy.$$

Folgern Sie, dass

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} E(y)\big\langle \operatorname{grad} f(x-y), y\big\rangle\, dy = 0$$

und

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} f(x-y)\big\langle \operatorname{grad} E(y), y\big\rangle\, dy = f(x).$$

(e) Beweisen Sie, dass für jedes $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B^n(\epsilon)} E(y)\psi(y)\, dy$$

existiert.

Wir definieren $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi(x) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\phi_\epsilon(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(f) Beweisen Sie

$$\Delta\phi(x) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\Delta\phi_\epsilon(x) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Das Ergebnis dieser Aufgabe zeigt, dass die Abbildung E benützt werden kann, um eine Lösung ϕ der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta\phi = f$$

mit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ zu finden. Die Funktion E wird eine Fundamentallösung oder Greensche Funktion von Δ genannt.

Abgabetermin der Hausaufgaben: Montag, 20. Juli 2020, 9 Uhr via Panda.