Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

12. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 12.1 Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0\}$ und sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$f(x) = \Big(\sinh(x_2) + 2x_1x_2^2, x_1^2x_2 + e^{\sin(x_1)+\cos(x_3)}, \frac{1}{3}x_3^3\Big).$$

Berechnen Sie

$$\int_M \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2}} \left\langle f(x), \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \right\rangle dx,$$

wobei dx das Flächenmaß auf M bezeichnet.

Lösung: Wir definieren $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \leq 1, x_3 \geq 0\}$. Der Rand von Ω ist gleich $\overline{M \cup N}$, wobei $N = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 2x_2^2 < 1, x_3 = 0\}$. Der Rand von Ω ist keine C^1-Untermannigfaltigkeit, aber es ist was in Soergels Skript eine Fastmannigfaltigkeit genannt wird. Das äußere Einheitsnormalenfeld ν von Ω ist auf $M \cup N$ gegeben durch

$$\nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x_1^2+4x_2^2+x_3^2}} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}, & (x \in M) \\ \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & (x \in N). \end{cases}$$

Da

$$\int_N \left\langle f(x), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dx = \int_N \frac{1}{3}x_3^3 \, dx = 0,$$

gilt nach dem Integralsatz von Gauß

$$\begin{aligned} &\int_M \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2}} \left\langle f(x), \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \right\rangle dx \\ &= 2\int_M \langle f(x), \nu(x)\rangle \, dx + 2\int_N \langle f(x), \nu(x)\rangle \, dx \\ &= 2\int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, dx \\ &= 2\int_\Omega 2x_2^2 + x_1^2 + x_3^2 \, dx. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \sqrt{2}x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung Φ ist ein C^1-Diffeomorphismus und $\Phi(\Omega) = \{x \in B^3 : x_3 \geq 0\} =: B_+$. Wir verwenden die Transformationsformel und bekommen

$$2\int_\Omega 2x_2^2 + x_1^2 + x_3^2\,dx = 2\sqrt{2}\int_{B_+} \|x\|^2\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos(\theta)\,d\theta\,d\phi\,dr = \frac{4\sqrt{2}\pi}{5}.$$

Präsenzaufgabe 12.2 Sei Δ der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$, das heißt Δ ist der partielle Differentialoperator gegeben durch

$$\Delta\phi = \sum_{k=1}^n \partial_k^2\phi \qquad \big(\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\big).$$

Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, sodass $\overline{\Omega}$ ein Kompaktum mit C^1-Rand ist. Wir definieren $\nu : \partial\Omega \to S^{n-1}$ als das äußere Einheitsnormalenfeld von Ω und schreiben dy für das Flächenmaß auf $\partial\Omega$. Seien $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(a) Beweisen Sie die erste Identität von Green

$$\int_\Omega g(x)\Delta f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} g(y)\big\langle \operatorname{grad} f(y), \nu(y)\big\rangle\,dy - \int_\Omega \big\langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x)\big\rangle\,dx.$$

(b) Beweisen Sie die zweite Identität von Green

$$\int_\Omega f(x)\Delta g(x) - g(x)\Delta f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} f(y)\big\langle \operatorname{grad} g(y), \nu(y)\big\rangle - g(y)\big\langle \operatorname{grad} f(y), \nu(y)\big\rangle\,dy.$$

Lösung:

(a) Wir betrachten das Vektorfeld $\phi = g\operatorname{grad} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\operatorname{div}\phi = \sum_{k=1}^n \partial_k(g\,\partial_k f) = \sum_{k=1}^n \partial_k g\,\partial_k f + g\partial_k^2 f = \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f\rangle + g\Delta f.$$

Jetzt verwenden wir den Integralsatz von Gauß und bekommen

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} g(y)\big\langle \operatorname{grad} f(y), \nu(y)\big\rangle\,dy &= \int_{\partial\Omega} \big\langle \phi(y), \nu(y)\big\rangle\,dy \\ &= \int_\Omega \operatorname{div}\phi(x)\,dx \\ &= \int_\Omega \big\langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x)\big\rangle\,dx + \int_\Omega g(x)\Delta f(x)\,dx.\end{aligned}$$

(b) Wir verwechseln die Rolle von f und g in die erste Identität von Green und bekommen

$$\int_\Omega f(x)\Delta g(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} f(y)\big\langle \operatorname{grad} g(y), \nu(y)\big\rangle\,dy - \int_\Omega \big\langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x)\big\rangle\,dx.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}&\int_\Omega f(x)\Delta g(x) - g(x)\Delta f(x)\,dx \\ &\quad= \int_\Omega f(x)\Delta g(x)\,dx - \int_\Omega g(x)\Delta f(x)\,dx \\ &\quad= \int_{\partial\Omega} f(y)\big\langle \operatorname{grad} g(y), \nu(y)\big\rangle\,dy - \int_\Omega \big\langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x)\big\rangle\,dx \\ &\qquad\quad - \int_{\partial\Omega} g(y)\big\langle \operatorname{grad} f(y), \nu(y)\big\rangle\,dy + \int_\Omega \big\langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x)\big\rangle\,dx \\ &\quad= \int_{\partial\Omega} f(y)\big\langle \operatorname{grad} g(y), \nu(y)\big\rangle - g(y)\big\langle \operatorname{grad} f(y), \nu(y)\big\rangle\,dy.\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 12.3 Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren das Newton-Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n; \quad x \mapsto \frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})\|x\|^n} x.$$

(a) Zeigen Sie, dass f divergenzfrei auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist, das heißt

$$\mathrm{div} f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, sodass $\overline{\Omega}$ ein Kompaktum mit C^1-Rand ist und $0 \notin \partial\Omega$. Sei $\nu : \partial\Omega \to S^{n-1}$ das äußere Einheitsnormalenfeld. Beweisen Sie die Identität

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle = \begin{cases} 1, & (0 \in \Omega) \\ 0, & (0 \notin \Omega). \end{cases}$$

Lösung:

(a) Sei $1 \leq k \leq n$. Es gilt

$$\partial_k \|x\|^{-n} x_k = -n\|x\|^{-n-1} \frac{x_k}{\|x\|} x_k + \|x\|^{-n} = -n \frac{x_k^2}{\|x\|^{n+2}} + \|x\|^{-n}$$

Es folgt

$$\mathrm{div} \|x\|^{-n} x = \sum_{k=1}^{n} \partial_k \|x\|^{-n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \left(-n \frac{x_k^2}{\|x\|^{n+2}} + \|x\|^{-n} \right) = -n \frac{\|x\|^2}{\|x\|^{n+2}} + n\|x\|^{-n} = 0.$$

(b) Wenn $0 \notin \Omega$, dann folgt aus dem Integralsatz von Gauß, dass

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle = \int_{\Omega} \mathrm{div} f(x)\, dx = 0.$$

Jetzt nehmen wir an, dass $0 \in \Omega$. Sei $\epsilon > 0$, sodass $B^n(\epsilon) \subseteq \Omega$. Wir schreiben Ω' für $\Omega \setminus B^n(\epsilon)$. Die Rand von Ω' ist gleich $\partial\Omega \cup S^{n-1}(\epsilon)$. Das äußere Einheitsnormalenfeld ν' von Ω' ist auf $S^{n-1}(\epsilon)$ gegeben durch

$$\nu'(x) = -\frac{1}{\epsilon} x \qquad \big(x \in S^{n-1}(\epsilon)\big).$$

Aus dem Integralsatz von Gauß folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} \langle f(y), \nu(y) \rangle \, dy - \frac{1}{\epsilon} \int_{S^{n-1}(\epsilon)} \langle f(y), y \rangle \, dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle f(y), \nu(y) \rangle \, dy + \int_{S^{n-1}(\epsilon)} \langle f(y), \nu'(y) \rangle \, dy \\ &= \int_{\partial\Omega'} \mathrm{div} f(y)\, dy \\ &= 0, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle f(y), \nu(y) \rangle \, dy &= \frac{1}{\epsilon} \int_{S^{n-1}(\epsilon)} \langle f(y), y \rangle \, dy \\ &= \frac{1}{\epsilon\, \mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}(\epsilon)} \|y\|^{2-n} \, dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^{n-1} \mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}(\epsilon)} dy \\ &= 1. \end{aligned}$$