Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

1. Übungsblatt

Hausaufgabe 1.1 Für $p \in [1, \infty)$ und eine Regelfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ sei

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(a) Seien $p, q \in [1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie die Höldersche Ungleichung: Für alle Regelfunktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

(b) Sei $p \in [1, \infty)$. Beweisen Sie die Minkowskische Ungleichung: Für alle Regelfunktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Lösung: Die Ungleichungen können auf gleiche Weise wie die Cauchy-Schwarz Ungleichung in Präsenzaufgabe 1.4 bewiesen werden. Man beweist zuerst, dass die Ungleichungen für Treppenfunktionen gelten. Dazu bracht man die Höldersche und Minkowskische Ungleichung für Summen aus Präsenzaufgabe 14.1 von Analysis 1. Zunächst beweist man die Ungleichungen für Regelfunktionen f und g durch Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu betrachten, wobei f_n und g_n Treppenfunktionen sind und

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \|g_n - g\| = 0.$$

Hausaufgabe 1.2 Folgern Sie mit Hilfe der partiellen Integrationsregel für jedes $n \in \mathbb{N}$:

(a) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so gilt

$$\int f(x)^n f'(x) \, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}.$$

(b) Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbare Funktionen, so gilt

$$\int f(x)g^{(n)}(x) \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)}(x)g^{(n-k-1)}(x) + (-1)^n \int f^{(n)}(x)g(x) \, dx.$$

Lösung:

(a) Wir schreiben g für f^n. Nach der partiellen Integrationsregel gilt

$$\int g(x)f'(x) \, dx = g(x)f(x) - \int g'(x)f(x) \, dx.$$

Es folgt, dass

$$\int f^n(x)f'(x)\,dx = f^{n+1}(x) - \int n f^{n-1}(x)f'(x)f(x)\,dx = f^{n+1}(x) - n\int f^n(x)f'(x)\,dx$$

und damit

$$(n+1)\int f^n(x)f'(x)\,dx = f^{n+1}(x).$$

(b) Wir beweisen die Aussage mit Induktion. Für $n = 1$ ist die Aussage einfach die partielle Integrationsregel. Nehme jetzt an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. Dann

$$\int f(x)g^{(n+1)}(x)\,dx = f(x)g^{(n)}(x) - \int f'(x)g^{(n)}(x)\,dx$$

Jetzt verwenden wir die Induktionsvoraussetzung (mit f' statt f) und bekommen

$$\int f'(x)g^{(n)}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k+1)}(x)g^{(n-k-1)}(x) + (-1)^n\int f^{(n+1)}(x)g(x)\,dx$$

und damit

$$\begin{aligned}
&\int f(x)g^{(n+1)}(x)\,dx\\
&= f(x)g^{(n)}(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k+1)}(x)g^{(n-k-1)}(x) + (-1)^n\int f^{(n+1)}(x)g(x)\,dx\right)\\
&= f(x)g^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1} f^{(k+1)}(x)g^{(n-k-1)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g(x)\,dx\\
&= f(x)g^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g(x)\,dx\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 1.3 Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-2)^3}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^4(x)}\,dx.$

Lösung: Es gilt

(a)

$$\begin{aligned}
x^5 &= (x-2)^5 + 10x^4 - 40x^3 + 80x^2 - 80x + 32\\
&= (x-2)^5 + 10(x-2)^4 + 40x^3 - 160x^2 + 240x - 128\\
&= (x-2)^5 + 10(x-2)^4 + 40(x-2)^3 + 80x^2 - 240x + 192\\
&= (x-2)^5 + 10(x-2)^4 + 40(x-2)^3 + 80(x-2)^2 + 80x - 128\\
&= (x-2)^5 + 10(x-2)^4 + 40(x-2)^3 + 80(x-2)^2 + 80(x-2) + 32
\end{aligned}$$

und darum für $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^5}{(x-2)^3}\,dx \\
&= \int \Big((x-2)^2 + 10(x-2)^1 + 40 + 80(x-2)^{-1} + 80(x-2)^{-2} + 32(x-2)^{-3}\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{3}(x-2)^3 + 5(x-2)^2 + 40(x-2) + 80\log(|x-2|) - 80(x-2)^{-1} - 16(x-2)^{-2}.
\end{aligned}$$

(b) Sei $x \notin \mathbb{Z}\frac{\pi}{2}$. Wir verwenden die Identität $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ zweimal und bekommen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2(x)\cos^4(x)} &= \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)\cos^4(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^4(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^4(x)} + \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)} \\
&= \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)} \\
&= \tan^2(x)\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\sin^2(x)}.
\end{aligned}$$

Weil $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ gilt $\frac{d}{dx}\tan^3(x) = 3\tan^2(x)\frac{1}{\cos^2(x)}$. Sei $\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Dann gilt $\operatorname{cotan}'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$. Es folgt, dass

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^4(x)}\,dx = \frac{1}{3}\tan^3(x) + 2\tan(x) - \operatorname{cotan}(x).$$

Hausaufgabe 1.4 Untersuchen Sie die folgenden uneigentliche Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \log\left(\frac{1+x}{x}\right)dx,$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Lösung:

(a) Die Funktion $x \mapsto x\log(x) - x$ ist eine Stammfunktion von log. Weil $\log\left(\frac{1+x}{x}\right) = \log(1+x) - \log(x)$, folgt, dass für alle $r > 1$

$$\begin{aligned}
\int_1^r \log\left(\frac{1+x}{x}\right)dx &= \Big((1+x)\log(1+x) - (1+x) - x\log(x) + x\Big)\Big|_{x=1}^r \\
&= (1+r)\log(1+r) - r\log(r) - 2\log(2) \\
&= \log(1+r) + r\log\left(\frac{1+r}{r}\right) - 2\log(2).
\end{aligned}$$

Da $r\log\left(\frac{1+r}{r}\right) \geq 0$ gilt

$$\lim_{r\to\infty}\int_1^r \log\left(\frac{1+x}{x}\right)dx = \lim_{r\to\infty}\left(\log(1+r) + r\log\left(\frac{1+r}{r}\right) - 2\log(2)\right) = \infty.$$

Damit ist das Integral $\int_1^\infty \log\left(\frac{1+x}{x}\right)dx$ divergent.

(b) arcsin ist eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Darum gilt für $-1 < s < t < 1$

$$\int_s^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(t) - \arcsin(s)$$

und damit

$$\lim_{s\downarrow -1}\lim_{t\uparrow 1}\int_s^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{s\downarrow -1}\lim_{t\uparrow 1}\big(\arcsin(t) - \arcsin(s)\big) = \frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \pi.$$

Es folgt, dass $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konvergent und gleich π ist.