Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

1. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 1.1 Gegeben seien zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_a^b xe^{-x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_a^b xe^{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_a^b x^3e^{x}\,dx$

Lösung:

(a) Es gilt $\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$. Die Funktion $F : x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ eine Stammfunktion von $x \mapsto xe^{-x^2}$ and darum

$$\int_a^b xe^{-x^2}\,dx = F(b) - F(a) = \frac{1}{2}e^{-a^2} - \frac{1}{2}e^{-b^2}.$$

(b) Wir verwenden partielle Integration. Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen sind, dann gilt

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\,dx &= \int_a^b \Big((fg)'(x) - f(x)g'(x)\Big)\,dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Seien jetzt f und g gegeben durch $f(x) = e^x$ und $g(x) = x$. Dann gilt $f' = f$ und $g' = 1$. Es folgt, dass

$$\int_a^b xe^x\,dx = be^b - ae^a - \int_a^b e^x\,dx = be^b - ae^a - e^b + e^a = (b-1)e^b - (a-1)e^a.$$

(c) Wir verwenden partielle Integration mehrmals, erst mit $g : x \mapsto x^3$, dann mit $g : x \mapsto x^2$ und zum Schluss mit $g : x \mapsto x$. Die Funktion f ist immer gegeben durch $f(x) = e^x$. Wir bekommen also

$$\begin{aligned}\int_a^b x^3e^x\,dx &= b^3e^b - a^3e^a - 3\int_a^b x^2e^x\,dx \\ \int_a^b x^2e^x\,dx &= b^2e^b - a^2e^a - 2\int_a^b xe^x\,dx \\ \int_a^b xe^x\,dx &= be^b - ae^a - \int_a^b e^x\,dx.\end{aligned}$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x^3 e^x \, dx &= b^3e^b - a^3e^a - 3\int_a^b x^2 e^x \, dx \\
&= b^3e^b - a^3e^a - 3\Big(b^2e^b - a^2e^a - 2\int_a^b xe^x \, dx\Big) \\
&= b^3e^b - a^3e^a - 3b^2e^b + 3a^2e^a + 6\int_a^b xe^x \, dx \\
&= b^3e^b - a^3e^a - 3b^2e^b + 3a^2e^a + 6\Big(be^b - ae^a - \int_a^b e^x \, dx\Big) \\
&= b^3e^b - a^3e^a - 3b^2e^b + 3a^2e^a + 6be^b - 6ae^a - 6\int_a^b e^x \, dx \\
&= b^3e^b - a^3e^a - 3b^2e^b + 3a^2e^a + 6be^b - 6ae^a - 6e^b + 6e^a \\
&= e^b\big(b^3 - 3b^2 + 6b - 6\big) - e^a\big(a^3 - 3a^2 + 6a - 6\big).
\end{aligned}
$$

Präsenzaufgabe 1.2 Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(x)\sin^3 \, dx.$$

Lösung: Es gilt $\cos^2 + \sin^2 = 1$ und damit $\cos^6\sin^3 = \cos^6\sin - \cos^8\sin$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann $(\cos^k)' = -k\cos^{k-1}\sin$. Es folgt, dass $\frac{1}{9}\cos^9 - \frac{1}{7}\cos^7$ eine Stammfunktion von $\cos^6\sin^3$ ist. Da $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\cos(0) = 1$, gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(x)\sin^3 \, dx = \frac{1}{9}\cos^9(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{7}\cos^7(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{9}\cos^9(0) + \frac{1}{7}\cos^7(0) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{7} = \frac{2}{63}.$$

Präsenzaufgabe 1.3

(a) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx.$$

(b) Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.$$

(c) Folgern Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

Lösung:

(a) Sei $\phi_n : [1,2] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\phi_n(x) = \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

falls $x \in [1 + \frac{k-1}{n}, 1 + \frac{k}{n})$ mit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jetzt ist

$$1 < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{2}{n} < \cdots < 1 + \frac{n-1}{n} < 2$$

eine Zerlegung von $[1,2]$ und ϕ ist konstant und gleich $\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ auf jedem Interval $(1+\frac{k-1}{n}, 1+\frac{k}{n})$. Damit ist ϕ eine Treppenfunktion. Es gilt

$$\int_1^2 \phi_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \Big((1+\frac{k}{n}) - (1+\frac{k-1}{n})\Big)\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Die Funktion $\phi : [1,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig und damit eine Regelfunktion. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[1,2]} |\phi_n(x) - \phi(x)| &= \max_{k\in\{1,2,\dots,n\}} \sup_{x\in[1+\frac{k-1}{n}, 1+\frac{k}{n})} |\phi_n(x) - \phi(x)| \\
&= \max_{k\in\{1,2,\dots,n\}} \sup_{x\in[1+\frac{k-1}{n}, 1+\frac{k}{n})} \Big|\frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \frac{1}{x}\Big| \\
&= \max_{k\in\{1,2,\dots,n\}} \Big|\frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}\Big| \\
&= \max_{k\in\{1,2,\dots,n\}} \Big|\frac{n}{n+k} - \frac{n}{n+k-1}\Big| \\
&= \max_{k\in\{1,2,\dots,n\}} \Big|\frac{n(n+k-1) - n(n+k)}{(n+k)(n+k-1)}\Big| \\
&= \max_{k\in\{1,2,\dots,n\}} \frac{n}{(n+k)(n+k-1)}.
\end{aligned}$$

Weil $(n+k)(n+k-1)$ als Funktion von k wächst, gilt

$$\sup_{x\in[1,2]} |\phi_n(x) - \phi(x)| = \frac{n}{(n+1)n} = \frac{1}{n+1}.$$

Der Grenzwert der Folge $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleich 0. Nach Definition 8.8 im Skript von Müller gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \int_1^2 \phi_n(x)\,dx = \int_1^2 \phi(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

(b) Wir trennen die Summe für gerade und ungerade k. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2k}}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.
\end{aligned}$$

Weil

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k},$$

gilt

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

Jetzt stellen wir die Faktor 2 unter der Summe und bekommen

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

(c) Jetzt betrachten wir die Summe $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ und ersetzen die Laufvariabele k durch l, wobei $k = l + n$. Dann

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l+n}.$$

Die Grenzwert der rechten Seite für $n \to \infty$ ist nach (a) gleich

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \log(2) - \log(1) = \log(2).$$

Nach (b) folgt, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log(2).$$

Präsenzaufgabe 1.4 Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen. Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \le \left(\int_a^b f(x)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lösung: Wir betrachten erst Treppenfunktionen f und g. Dann ist auch fg eine Treppenfunktion. Sei

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

eine Zerlegung von $[a, b]$, so dass f, g und fg konstant sind auf jedem Intervall (x_{k-1}, x_k) für $k = 1, 2, \ldots, n$. Sei c_k der Wert von f und d_k der Wert von g auf dem Intervall (x_{k-1}, x_k). Dann gilt

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})|c_k d_k| = \sum_{k=1}^{n} \left|(x_k - x_{k-1}) c_k d_k\right| = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

wobei $a_k = \sqrt{x_k - x_{k-1}}|c_k|$ und $b_k = \sqrt{x_k - x_{k-1}}|d_k|$. Nach der Cauchy-Schwartzsche Ungleichung für Summen (sehen Sie Hausaufgabe 3.4 von Analysis 1) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) c_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) d_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Summen auf der rechten Seite können als Integrale der Treppenfunktionen f^2 und g^2 geschrieben werden, also

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) c_k^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) d_k^2 = \int_a^b g^2(x)\, dx.$$

Dies beweist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Treppenfunktionen.

Seien jetzt f und g Regelfunktionen. Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Treppenfunktionen, so dass $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \|g - g_n\| = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|fg - f_n g_n\| &= \|(fg - f_n g) + (f_n g - f_n g_n)\| \\ &\le \|fg - f_n g\| + \|f_n g - f_n g_n\| \\ &\le \|f - f_n\|\, \|g\| + \|f_n\|\, \|g - g_n\|. \end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung haben wir benützt, dass

$$\sup_x |\phi(x)\psi(x)| \leq \sup_x |\phi(x)| \sup_y |\psi(y)|$$

für alle Funktionen ϕ und ψ. Weiter gilt

$$\|f_n\| = \|(f_n - f) + f\| \leq \|f_n - f\| + \|f\|$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \|fg - f_n g_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \Big(\|f - f_n\| \, \|g\| + \big(\|f_n - f\| + \|f\|\big) \, \|g - g_n\| \Big) = 0.$$

Nach Definition 8.8 im Skript von Müller gilt

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x)g_n(x)| \, dx.$$

Auf ähnliche Weise kann man beweisen, dass $\lim_{n\to\infty} \|f_n^2 - f\| = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \|g_n^2 - g\| = 0$. Darum gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g_n(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für f_n und g_n haben wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung schon bewiesen, also

$$\int_a^b |f_n(x)g_n(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b f_n(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g_n(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für f und g folgt jetzt durch die Grenzwert für $n \to \infty$ an beide Seiten dieser Ungleichung zu nehmen.