Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

2. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 2.1 Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion f mit Entwicklungsstelle a, wobei

(a) $f = \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a = 0$,

(b) $f = \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a = \pi$,

(c) $f = \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ und $a = 1$.

In welche Fällen stimmen f und die Taylorreihe überein?

Präsenzaufgabe 2.2 Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & (x > 0) \\ 0, & (x \leq 0) \end{cases}$$

mit Entwicklungsstelle $a = -1, 0, 1$. In welche Fällen stimmen f und die Taylorreihe überein?

Präsenzaufgabe 2.3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar und sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Hinweis: Betrachten Sie das 2*-Taylor Polynom von* f*.*

Präsenzaufgabe 2.4 Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Bestimmen Sie alle Topologien auf M. Welche Topologien sind T_1 und welche sind Hausdorffsch?

Präsenzaufgabe 2.5 Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für die folgenden Aussagen.

(a) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$,

(b) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$,

(c) $\overline{(A^\circ)} = A$,

(d) $(\overline{A})^\circ = A$.

Präsenzaufgabe 2.6 Sei V ein Vektorraum und $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf V. Dann sind gleichbedeutend:

1. $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent,
2. $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{B}_{\|\cdot\|_2}$,
3. $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$.

Hausaufgabe 2.1 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Potenzreihe, also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \big(x \in (-R, R)\big).$$

Beweisen Sie, dass die Taylorreihe von f mit Entwicklungsstelle 0 übereinstimmt mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Hausaufgabe 2.2 Geben Sie ein Beispiel von zwei topologischen Räumen X und Y mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{T}_{X \times Y} = \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.

Hausaufgabe 2.3 Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Beweisen Sie die folgende Aussage. Eine Teilmenge A von Y ist genau dann abgeschlossen bezüglich der von X induzierten Topologie auf Y, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge B von X gibt, sodass $A = B \cap Y$.

Hausaufgabe 2.4 Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für die folgenden Aussagen.

(a) $\partial(\partial A) = \partial A$,

(b) $\partial A \neq A$,

(c) $\overline{A} \neq A^{\circ}$.

Hausaufgabe 2.5 Seien X und Y topologische Räume. Wir betrachten $X \times Y$ versehen mit der Produktopologie. Seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Bestimmen Sie den Rand von $A \times B$ in $X \times Y$. *Hinweis: Um die Antwort zu erraten, bestimmen Sie zuerst den Rand von $A \times B$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, wobei A und B Intervalle in $\mathbb{R}$ sind.*

Hausaufgabe 2.6 Beweisen Sie, dass die kofinite Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{cf},X}$ auf einer unendlichen Menge X nicht Hausdorffsch ist. Schliessen Sie, dass $\mathcal{T}_{\mathrm{cf},X}$ nicht metrisch ist.

Abgabetermin der Hausaufgaben von Blatt 1 und Blatt 2: Montag, 4. Mai 2020, 10 Uhr via Panda.