Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

3. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 3.1 Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$. Beweisen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für alle abgeschlossene Teilmengen A von Y das Urbild $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

Lösung: Nehme an, dass f stetig ist. Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen. Dann ist A^c offen. Weil f stetig ist, ist auch $f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c)$ offen. Es folgt, dass $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.
Nehme jetzt an, dass $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist für alle abgeschlossene Teilmengen $A \subseteq Y$. Sei $B \subseteq Y$ offen. Dann ist B^c abgeschlossen und deshalb ist $f^{-1}(B)^c = f^{-1}(B^c)$ abgeschlossen. Es folgt dass $f^{-1}(B)$ offen ist. Dies beweist, dass f stetig ist.

Präsenzaufgabe 3.2 Sei X ein kompakter topologischer Raum und sei $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Beweisen Sie, dass Y kompakt ist.

Lösung: Sei $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie offener Teilmengen von X, sodass $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Weil Y abgeschlossen ist, ist Y^c offen. Es gilt

$$X = Y^c \cup Y \subseteq Y^c \cup \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Damit ist $\{U_i : i \in I\} \cup \{Y^c\}$ eine offen Überdeckung von X. Weil X kompakt ist gibt es eine endliche Teilmenge J von I, sodass $\{U_i : i \in J\} \cup \{Y^c\}$ eine offene Überdeckung von X ist, dass heißt

$$X = Y^c \cup Y \subseteq Y^c \cup \bigcup_{i\in J} U_i.$$

Weil $Y \cap Y^c = \emptyset$ folgt

$$Y \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i.$$

Damit ist bewiesen, dass Y kompakt ist.

Präsenzaufgabe 3.3 Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Metrik auf X. Wir nennen d eine Ultrametrik wenn die verschärfte Form der Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq \max\big\{d(x, y), d(y, z)\big\} \qquad (x, y, z \in X) \tag{1}$$

gilt.

(a) Sei d eine Ultrametrik auf X. Für $x \in X$ und $r > 0$, sei

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

der offene Ball mit Mittelpunkt x und Radius r. Beweisen Sie, dass

$$\overline{B(x, r)} = B(x, r)$$

und

$$B(x, r) = B(y, r)$$

für alle $y \in B(x, r)$.

(b) Betrachten Sie das Beispiel $X = \mathbb{Q}$. Für eine Primzahl p definieren wir den p-adischen Betrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ geben durch

$$|x|_p = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x = 0, \\ p^{-n}, & \text{wenn } x = p^n \frac{a}{b} \text{ mit } a, b, p \text{ paarweise teilerfremd sind und } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass

$$d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}; \qquad (x, y) \mapsto |x - y|_p$$

eine Ultrametrik auf $\mathbb{Q}$ ist.

(c) Beweisen Sie, dass $(p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in dem metrischen Raum $(\mathbb{Q}, d_p)$ ist.

Lösung:

(a) Sei $y \notin B(x, r)$. Wir werden zeigen, dass $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. Nehme dazu an, dass $B(x, r) \cap B(y, r) \neq \emptyset$. Sei $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$. Dann

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} < r$$

Dies ist in Wiederspruch zu $y \notin B(x, r)$. Es folgt, dass $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$.

Wir haben jetzt gezeigt, dass für jede $y \in B(x, r)^c$, der Ball $B(y, r)$ eine offene Umgebung von y in $B(x, r)^c$ ist. Es folgt, dass $B(x, r)^c$ offen ist und damit, dass $B(x, r)$ abgeschlossen ist.

Zunächst beweisen wir dass jede $y \in B(x, r)$ einen Mittelpunkt diesem Ball ist. Sei $z \in B(x, r)$. Es gilt

$$d(y, z) \leq \max\{d(y, x), d(x, z)\} < r$$

und damit $z \in B(y, r)$. Weil dies gilt für alle $z \in B(x, r)$, folgt $B(x, r) \subseteq B(y, r)$. Jetzt verwechseln wir die Rolle von x und y und bekommen auch $B(y, r) \subseteq B(x, r)$.

(b) Es ist klar dass $d_p(x, y) = d_p(y, x) \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ und $d_p(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$. Die Dreiecksungleichung ist schwächer als die Ultrametrische Ungleichung (1). Also müssen wir nur noch (1) überprüfen. Seien $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Seien weiter $n, m \in \mathbb{Z}$ so, dass $x - y = p^n \frac{a}{b}$ und $y - z = p^m \frac{c}{d}$ wobei a, b, p und c, d, p paarweise teilerfremd sind. Wenn $n \leq m$, dann

$$x - z = (x - y) + (y - z) = p^n \frac{a}{b} + p^m \frac{c}{d} = p^n \frac{ad + p^{m-n} bc}{bd}$$

Die Zahl bd is nicht teilbar durch p. Darum gibt es $e, f, k \in \mathbb{Z}$, so dass

$$x - z = p^k \frac{e}{f}$$

wobei $k \geq n$ und p, e und f paarweise teilerfremd sind. Es folgt

$$|x - z|_p = p^{-k} \leq p^{-n} = \max\{p^{-n}, p^{-m}\} = \max\{|x - y|_p, |y - z|_p\}.$$

(c) Es gilt

$$d_p(p^n, 0) = |p^n|_p = p^{-n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Es folgt, dass $(p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist und gegen 0 konvergiert.

Präsenzaufgabe 3.4 Sei X ein topologischer Raum und sei $C_b(X)$ der Vektorraum der beschränkten stetigen Funktionen $X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $C_b(X)$ eine abgeschlossene Teilmenge des Vektorraums $B(X)$ aller beschränkten Funktionen $X \to \mathbb{R}$ ist. Warum ist $C_b(X)$ ein Banachraum?

Lösung: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_b(X)$. Nehme an, dass die Folge konvergent ist als Folge in $B(X)$. Es gibt dann ein $f \in B(X)$, so dass $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Nach Satz 11 in Abschnit 1.2 in Forster ist f stetig. Es folgt, dass $f \in C_b(X)$. $B(X)$ ist eine Banachraum und darum metrisch. Nach Satz 2 im Abschnitt 1.2 in Forster ist $C_b(X)$ abgeschlossen.
Jede abgeschlossen Unterraum U einer Banachraums V versehen mit die von V eingeschränkte Norm ist Banach. Dafür ist es zu zeigen, dass U versehen mit die auf U eingeschränkte Norm vollständig ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in U. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge in V. Weil V vollständig ist, ist die Folge konvergent. Sei x die Grenzwert. Weil U abgeschlossen ist, gilt nach Satz 2 im Abschnitt 1.2 in Forster, dass $x \in U$. Es folgt, dass U vollständig ist.

Präsenzaufgabe 3.5 Sei I ein kompaktes Interval und sei $C^k(I)$ der Vektorraum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf I. Beweisen Sie, dass

$$\|\cdot\| : C^k(I) \to \mathbb{R}_{\geq 0}; \qquad \phi \mapsto \|\phi\| := \sum_{n=0}^{k} \sup_{x\in I} \left| \frac{d^n}{dx^n} \phi(x) \right|$$

eine Norm auf $C^k(I)$ ist und, dass $C^k(I)$ versehen mit $\|\cdot\|$ ein Banachraum ist.

Lösung: Sei $\phi \in C^k(I)$. $\|\phi\|$ is eine Summe von nicht-negativen Zahlen und damit nicht-negativ. Wenn $\|\phi\| = 0$, dann

$$0 \leq \sup_{x\in I} |\phi(x)| \leq \|\phi\| = 0$$

und darum $\phi = 0$. Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$, dann

$$\|\lambda\phi\| = \sum_{n=0}^{k} \sup_{x\in I} \left| \frac{d^n}{dx^n} \lambda\phi(x) \right| = |\lambda| \sum_{n=0}^{k} \sup_{x\in I} \left| \frac{d^n}{dx^n} \phi(x) \right| = |\lambda| \; \|\phi\|.$$

Seien jetzt $\phi, \psi \in C^k(I)$. Wegen der Dreieicksungleichung für $|\cdot|$ gilt

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \big(\phi(x) + \psi(x)\big) \right| = \left| \left(\frac{d^n}{dx^n} \phi(x) \right) + \left(\frac{d^n}{dx^n} \psi(x) \right) \right| \leq \left| \left(\frac{d^n}{dx^n} \phi(x) \right) \right| + \left| \left(\frac{d^n}{dx^n} \psi(x) \right) \right|$$

für alle $0 \leq n \leq k$ und $x \in I$. Es folgt

$$\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|.$$

Damit haben wir beweisen, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C^k(I)$ ist.
Jetzt beweisen wir, dass $\big(C^k(I), \|\cdot\|\big)$ vollständig und damit ein Banachraum ist. Sei $(\phi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^k(I)$. Für jede $\epsilon > 0$ gibt es ein $S \in \mathbb{N}$, so dass $\|\phi_s - \phi_t\| < \epsilon$ für alle $s, t \geq S$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq k$ gilt

$$\sup_{x\in I} \left| \frac{d^n}{dx^n} \big(\phi_s(x) - \phi_t(x)\big) \right| \leq \|\phi_s - \phi_t\| < \epsilon \qquad (s, t \geq S).$$

Es folgt, dass $(\phi^{(s)})_{s\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C(I)$ versehen mit der Supremumnorm ist. Weil I kompakt ist, ist jede stetige Funktion auf I beschränkt. Nach Präsenzaufgabe 3.4 ist $C(I)$ versehen mit die Supremumnorm eine Banachraum. Die Folgen $(\phi_s^{(n)})_{s\in\mathbb{N}}$ sind darum gleichmässig konvergent und es gibt $f_n \in C(I)$, sodass

$$\lim_{t\to\infty} \phi_s^{(n)} = f_n.$$

Nach Satz 8.21 im Skript von Müller ist f_n stetig differenzierbar und $f_n' = f_{n+1}$ für alle $0 \leq n < k$. Es folgt

$$f_n = f_0^{(n)} \qquad (0 \leq n < k).$$

Insbesondere, gilt $f_0 \in C^k(I)$. Weil für alle $0 \leq n < k$ die Folge $(\phi_s^{(n)})_{s\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f_n konvergiert gilt

$$\|f_0 - \phi_s\| = \sum_{n=0}^{k} \sup_{x\in I} \left| \frac{d^n}{dx^n}\big(f_0(x) - \phi_s(x)\big) \right| = \sum_{n=0}^{k} \sup_{x\in I} \left| f_n(x) - \phi_s^{(n)}(x)\big) \right| \to 0 \qquad (s \to \infty).$$

Damit ist bewiesen, dass $\big(C^k(I), \|\cdot\|\big)$ vollständig ist.

Präsenzaufgabe 3.6 Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und sei $A : V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) A ist stetig.

(b) A ist stetig in 0.

(c) $\sup_{v\in V\setminus\{0\}} \dfrac{\|A(v)\|_W}{\|v\|_V} < \infty$.

Lösung: Sehen Sie Satz 12 in Abschnitt 1.2 in Forster.