Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit Sommersemester 2020

Analysis 2

4. Übungsblatt

Hausaufgabe 4.1 Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine injektive C^1-Kurve und sei $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch

$$\phi(t) := \int_a^t \|\gamma'(s)\| \, ds$$

(a) Beweisen Sie, dass ϕ differenzierbar und strikt monoton steigend ist.

(b) Beweisen Sie, dass ϕ ein Homöomorphismus $[a, b] \to [0, L]$ ist, wobei $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$.

(c) Sei $\delta := \gamma \circ \phi^{-1}$. Beweisen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Identität

$$\phi' \cdot (\delta' \circ \phi) = \gamma'.$$

(d) Beweisen Sie, dass δ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Lösung:

(a) Der Hauptsatz der Analysis impliziert, dass ϕ differenzierbar ist und $\phi' = \|\gamma'\| \geq 0$. Damit ist ϕ monoton steigend. Da γ injektiv ist, gibt es für jedes Punkt $t \in [a, b]$ eine offene Umgebung U von t, sodass $\gamma'(s) \neq 0$ für alle $s \in U \setminus \{t\}$. Seien $t_1, t_2 \in [a, b]$ mit $t_1 < t_2$. Dann gilt $\gamma'(s) \neq 0$ für s in eine offene nicht-leere Teilmenge von $[t_1, t_2]$. Es folgt, dass

$$\phi(t_2) = \phi(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(s)\| \, ds > \phi(t_1).$$

Dies beweist, dass ϕ streng monoton ist.

(b) Es gilt $\phi(a) = 0$ und $\phi(b) = L$. Da ϕ stetig ist, folgt aus der Mittelwertsatz impliziert, dass $\phi([a, b]) = [0, L]$. Weil ϕ strikt monoton steigend ist, ist ϕ bijektiv und ist auch ϕ^{-1} streng monoton steigend.

Es ist noch zu zeigen, dass ϕ^{-1} stetig ist. Wir nehmen an, dass ϕ^{-1} nicht stetig ist und zeigen, dass dies zu eine Widerspruch führt. Es gibt jetzt ein $y \in [0, L]$ und ein $\epsilon > 0$, sodass für alle $\delta > 0$ es ein $y' \in (y - \delta, y + \delta)$ mit $|\phi^{-1}(y') - \phi^{-1}(y)| \geq \epsilon$ gibt. Wenn wir $\delta = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ nehmen, dann finden wir also ein $y_n \in (y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n})$ mit $|\phi^{-1}(y_n) - \phi^{-1}(y)| \geq \epsilon$. Auf diese Weise bekommen wir eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Folge ist konvergent mit Grenzwert y. Jetzt betrachten wir die Mengen

$$N_+ := \{n \in \mathbb{N} : y_n > y\} \quad \text{und} \quad N_- := \{n \in \mathbb{N} : y_n < y\}.$$

Da $N_+ \cup N_- = \mathbb{N}$, ist mindestens eine der Mengen $N_\pm$ unendlich. Wir nehmen an, dass N_+ unendlich ist. (Das Beweis für den Fall, dass N_- unendlich ist, ist bis auf Umkehrung der Ungleichungen gleich.) Weil ϕ bijektiv ist, gibt es ein $y_0 \in [0, L]$, sodass $\phi^{-1}(y_0) = \phi^{-1}(y) + \frac{\epsilon}{2}$. Da ϕ^{-1} streng monoton steigend ist, gilt $y_0 > y$. Sei jetzt $n \in N_+$ so groß, dass $\frac{1}{n} < y_0 - y$. Dann gilt $y_n < y + \frac{1}{n} < y_0$. Da ϕ^{-1} streng monoton steigend ist, folgt $\phi^{-1}(y_n) < \phi^{-1}(y_0) = \phi^{-1}(y) + \frac{\epsilon}{2}$. Dies ist aber in Widerspruch zu $\phi^{-1}(y_n) \geq \phi^{-1}(y) + \epsilon$.

(c) Nach der Kettenregel gilt für $1 \leq i \leq n$

$$(\delta_i \circ \phi)' = (\delta_i \circ \phi)' \cdot \phi'$$

und damit

$$\gamma' = (\delta \circ \phi)' = \phi' \cdot (\delta' \circ \phi).$$

(d) Weil $\phi' = \|\gamma'\|$, gilt

$$\|\gamma'\| = |\phi'| \, \|\delta' \circ \phi\| = \|\gamma'\| \, \|\delta' \circ \phi\|.$$

Es folgt, dass $\|\delta' \circ \phi(t)\| = 1$ für alle $t \in [a, b]$. Weil ϕ bijektiv ist, gilt $\|\delta'(s)\| = 1$ für alle $s \in [0, L]$. Damit ist bewiesen, dass δ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Hausaufgabe 4.2 Sei $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ eine C^3-Kurve parametriziert nach der Bogenlänge. Die Abbildung

$$\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad t \mapsto \|\gamma''(t)\|$$

heisst die Krümmung der Kurve γ. Wir nehmen an, dass $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$. Sei weiter $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$n(t) := \frac{1}{\kappa(t)} \gamma''(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Der Vektor $n(t)$ heißt Hauptnormaleneinheitsvektor. Zum Schluss, sei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$b(t) := \gamma'(t) \times n(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Der Vektor $b(t)$ heißt Binormaleneinheitsvektor.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $t \in (a, b)$ die Vektoren $\gamma'(t)$, $n(t)$, $b(t)$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $t \in (a, b)$

$$\langle b'(t), b(t) \rangle = 0 \quad \text{and} \quad \langle b'(t), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Folgern Sie, dass $b'(t)$ ein Vielfaches von $n(t)$ ist.

(c) Sei $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\tau(t) := -\langle b'(t), n(t) \rangle \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

$\tau(t)$ heißt die Torsion der Kurve γ. Zeigen Sie, dass für alle $t \in (a, b)$

$$b'(t) = -\tau(t) n(t).$$

Lösung:

(a) Sei $t \in (a, b)$. Nach Präsenzaufgabe 4.3 sind $\gamma'(t)$ und $n(t)$ zenkrecht auf einander und der Länge 1. Weil

$$\|b(t)\|^2 = \|\gamma'(t) \times n(t)\|^2 = \|\gamma'(t)\|^2 \|n(t)\|^2 - \langle \gamma'(t), n(t) \rangle^2$$

gilt $\|b(t)\| = 1$. Da $b(t)$ das Kreuzprodukt von $\gamma'(t)$ und $n(t)$ ist, ist $b(t)$ orthogonal zu $\gamma'(t)$ und $n(t)$. Es folgt, dass γ', $n(t)$ und $b(t)$ die Länge 1 haben und paarweise orthogonal sind.

(b) Weil $\|b(t)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, gilt

$$0 = \frac{d}{dt}\|b(t)\|^2 = 2\langle b'(t), b(t)\rangle.$$

Da $\langle b(t), \gamma'(t)\rangle = 0$ für alle $t \in (a,b)$, gilt auch

$$0 = \frac{d}{dt}\langle b(t), \gamma'(t)\rangle = \langle b'(t), \gamma'(t)\rangle + \langle b(t), \gamma''(t)\rangle = \langle b'(t), \gamma'(t)\rangle + \kappa(t)\langle b(t), n(t)\rangle.$$

Aus $\langle b(t), n(t)\rangle = 0$ folgt

$$\langle b'(t), \gamma'(t)\rangle = 0.$$

Wir haben jetzt bewiesen, dass $b'(t)$ zenkrecht auf $b(t)$ und $\gamma'(t)$ ist. Da $b(t)$, $\gamma'(t)$ und $n(t)$ eine orhonormale Basis bilden, folgt, dass $b'(t)$ ein Vielfaches von $n(t)$ ist.

(c) Sei $t \in (a,b)$. Da $b'(t)$ ein Vielfaches von $n(t)$ ist, gibt es ein $c(t) \in \mathbb{R}$, sodass $b'(t) = c(t)n(t)$. Weil $\|n(t)\| = 1$, folgt,

$$\tau(t) = -\langle n(t), b'(t)\rangle = -\langle n(t), c(t)n(t)\rangle = -c(t)\langle n(t), n(t)\rangle. = -c(t)$$

und damit

$$b'(t) = -\tau(t)n(t).$$

Hausaufgabe 4.3 Eine Kurve $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ heißt eine verallgemeinerte Helix wenn es ein $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gibt, sodass

$$t \mapsto \langle \gamma'(t), v\rangle$$

konstant ist. Seien $r, c > 0$ und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ct \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(a) Beschreiben Sie die Kurve $\Gamma := \gamma(\mathbb{R})$. Malen Sie ein Bild.

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit γ' und Beschleunigung γ'' von γ.

(c) Zeigen Sie, dass γ eine verallgemeinerte Helix ist.

(d) Bestimmen Sie eine Reparametrisierung δ der Kurve Γ nach der Bogenlänge.

(e) Bestimmen Sie die Krümmung und Torsion von δ.

Nach dem Satz von Lancret ist eine dreimal stetig differenzierbare Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung genau dann eine verallgemeinerte Helix, wenn ihre Torsion ein konstantes Vielfaches ihrer Krümmung ist.

Lösung:

(b)

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ c \end{pmatrix}, \quad \gamma''(t) = \begin{pmatrix} -r\cos(t) \\ -r\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Sei $v = (0,0,1)$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\langle \gamma'(t), v\rangle = c.$$

Es folgt, dass γ eine verallgemeinerte Helix ist.

(d) Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t) + c^2} = \sqrt{r^2 + c^2}.$$

Sei $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\delta(s) = \gamma(\frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}).$$

Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\delta'(s)\| = \|\gamma'(\frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}})\frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}\| = \frac{\|\gamma'(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}})\|}{\sqrt{r^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{r^2 + c^2}}{\sqrt{r^2 + c^2}} = 1.$$

(e) Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann

$$\|\gamma''(t)\| = \sqrt{r^2 \cos^2(t) + r^2 \sin^2(t)} = r.$$

Darum gilt für alle $s \in \mathbb{R}$

$$\kappa(s) = \|\delta''(s)\| = \frac{\|\gamma''(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}})\|}{r^2 + c^2} = \frac{r}{r^2 + c^2},$$

$$n(s) = \frac{r^2 + c^2}{r}\delta''(s) = \frac{r^2 + c^2}{r}\delta''(s)\frac{1}{r^2 + c^2}\gamma''\left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}\right) = \left(\begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) \\ -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\begin{aligned} b(t) &= \delta'(s) \times n(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}\gamma'(\frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}) \times n(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}} \left(\begin{pmatrix} -r\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) \\ r\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) \\ -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}} \begin{pmatrix} c\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) \\ -c\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) \\ r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$b'(s) = \frac{c}{r^2 + c^2} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und damit

$$\begin{aligned} \tau(s) &= -\langle b'(s), n(s)\rangle \\ &= -\frac{c}{r^2 + c^2}\left(\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}\right)\right) \\ &= -\frac{c}{r^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 4.4 Sei $c \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ c, & \text{wenn } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie dass f kurvendifferenzierbar in jedem Punkt (x,y) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist.

(b) Seien e_1 und e_2 die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass die Richtungsableitungen $\partial_{e_1} f(0)$ und $\partial_{e_2} f(0)$ existieren wenn $c = 0$.

(c) Nehme an, dass $c = \frac{1}{2}$. Für welche $v \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $\partial_v f(0)$.

Lösung:

(a) Wenn $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = (x,y) \neq (0,0)$, dann sind γ_1 und γ_2 differenzierbar. Die Funktion

$$(-1,1) \to \mathbb{R}; \qquad t \mapsto \frac{\gamma_1(t)\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2}$$

ist das Quotient von Summen und Produkten von differenzierbare Funktionen und die Teiler $\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2$ ist ungleich 0 wenn t nah an 0 ist. Damit ist diese Funktion differenzierbar. Dies beweist, dass f Kurvendifferenzierbar in (x,y) ist.

(b) Sei $c = 0$. Es gilt

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 \to 0 \qquad (t \to 0),$$
$$\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0 \to 0 \qquad (t \to 0).$$

Dies beweist, dass $\partial_{e_1} f(0)$ und $\partial_{e_2} f(0)$ existieren und gleich 0 sind.

(c) Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Die Funktion

$$f_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad t \mapsto f(tv)$$

ist genau dann stetig in 0, wenn $f(v) = c$. In diesem Fall ist f_v konstant. Es folgt, dass die Richtungsableitung $\partial_v f(0)$ genau dann existiert, wenn $f(v) = c$ und dann gilt $\partial_v f(0) = 0$. Weiter gilt, dass $f(v) = \frac{1}{2}$, genau dann, wenn $2v_1v_2 = v_1^2 + v_2^2$. Dies ist der Fall, wenn $v_1 = v_2$. Die Richtungsableitung für $v = 0$ existiert immer und ist gleich 0.