Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

4. Übungsblatt

Wir schreiben $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für die übliche Bilinearform

$$(x,y)\mapsto\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$$

und $\|\cdot\|$ für die euklidische Norm $x\mapsto\sqrt{\langle x,x\rangle}$ auf $\mathbb{R}^n$.

Präsenzaufgabe 4.1 Sei $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^n$. Wir nennen γ differenzierbar, wenn jede Komponente γ_i differenzierbar ist. Beweisen Sie, dass γ genau dann differenzierbar ist wenn die Limiten in $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\gamma(t+h)-\gamma(t)\big)\qquad\big(t\in(a,b)\big)$$

existieren.

Lösung: Sei die 1-Norm $\|\cdot\|_1$ auf $\mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\|x\|_1:=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\qquad(x\in\mathbb{R}^n).$$

Da alle Normen auf R^n äquivalent sind, ist die von $\|\cdot\|_1$ indizierte metrische Topologie die übliche Euklidische Topologie.

Sei $t\in(a,b)$. Wir nehmen erst an, dass γ differenzierbar in t ist. Sei $v\in\mathbb{R}^n$ gegeben durch $v_i=\gamma_i'(t)$. Für jede $1\leq i\leq n$ gilt

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{1}{h}\big(\gamma_i(t+h)-\gamma_i(t)\big)-v_i\right|=0$$

und darum

$$\left\|\frac{1}{h}\big(\gamma(t+h)-\gamma(t)\big)-v\right\|_1=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{h}\big(\gamma_i(t+h)-\gamma_i(t)\big)-v_i\right|\to 0\quad(h\to 0).$$

Es folgt, dass die Limes von $\frac{1}{h}\big(\gamma(t+h)-\gamma(t)\big)$ für $h\to 0$ in $\mathbb{R}^n$ existiert und die Grenzwert gleich v ist.

Jetzt nehmen wir an, dass die Limes $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\gamma(t+h)-\gamma(t)\big)$ in $\mathbb{R}^n$ existiert und gleich $v\in\mathbb{R}^n$ ist. Sei $1\leq i\leq n$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\big(\gamma_i(t+h)-\gamma_i(t)\big)-v_i\right|&\leq\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{1}{h}\big(\gamma_j(t+h)-\gamma_j(t)\big)-v_j\right|\\&=\left\|\frac{1}{h}\big(\gamma(t+h)-\gamma(t)\big)-v\right\|_1\to 0\quad(h\to 0)\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\frac{1}{h}\big(\gamma_i(t+h)-\gamma_i(t)\big)$ für $h\to 0$ gegen v_i konvergiert. Weil dies gilt für alle i, ist γ differenzierbar in t.

Präsenzaufgabe 4.2 Die Zykloide beschreibt die Bahn eines Punktes p auf der Peripherie eines Kreises vom Radius 1 in $\mathbb{R}^2$, der auf der x-Achse der x-y-Ebene mit konstanter Geschwindigkeit abrollt, siehe Bild 4.7 in Abschnitt 1.7 in Forster. Wir nehmen an, dass dieser Punkt p im Ursprung $(0,0)$ zur Zeit $t=0$ beginnt. Sei $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ die Kurve, sodass $\gamma(t)$ die Koordinaten des Punktes p zur Zeit t darstellt.

(a) Sei $\gamma_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, so dass $\gamma(t)$ für alle $t\in\mathbb{R}$ der Mittelpunkt des Kreises ist. Geben Sie die Formel für $\gamma_0(t)$ an.

(b) Sei $\gamma_1:=\gamma-\gamma_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$. Welche Kurve stellt γ_1 dar? Geben Sie ein Formel für $\gamma_1(t)$ an.

(c) Geben Sie ein Formel für $\gamma(t)$ an.

(d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Punktes p für alle $t\in\mathbb{R}$.

(e) Sei $T>0$. Berechnen Sie die Bogenlänge $\phi(T)$ des Teils der Zykloide der zu den Parameterwerten $0\le t\le T$ gehört.

(f) Beweisen Sie, dass $\phi:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ ein Homöomorphismus ist.

(g) Beweisen Sie, dass $\delta:=\gamma\circ\phi^{-1}:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

(h) Berechnen Sie die Geschwindigkeit δ' und Beschleunigung δ'' von δ.

(i) Zeigen Sie, dass
$$\langle\delta'(t),\delta''(t)\rangle=0\qquad(t\in\mathbb{R}_{>0}).$$

Diese Aufgabe wird am Donnerstag 14. Mai besprochen.

Präsenzaufgabe 4.3 Sei $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^n$ eine C^2-Kurve. Beweisen Sie, dass γ genau dann nach der Bogenlänge parametrisiert ist, wenn es ein $t_0\in(a,b)$ mit $\|\gamma'(t_0)\|=1$ gibt und
$$\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle=0\qquad\big(t\in(a,b)\big).$$

Lösung: Die Kurve γ ist genau dann nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn $\|\gamma'(t)\|=1$ für alle $t\in(a,b)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $t_0\in(a,b)$ gibt mit $\|\gamma'(t_0)\|=1$ und $\frac{d}{dt}\|\gamma'(t)\|^2=0$. Es gilt
$$\frac{d}{dt}\|\gamma'(t)\|^2=\frac{d}{dt}\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle=\langle\gamma''(t),\gamma'(t)\rangle+\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle=2\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle.$$
Es folgt, dass γ genau dann nach der Bogenlänge parametrisiert ist, wenn es ein $t_0\in(a,b)$ mit $\|\gamma'(t_0)\|=1$ gibt und $\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle=0$ für alle $t\in(a,b)$.

Präsenzaufgabe 4.4 Berechnen Sie alle Richtungsableitungen der Funktion
$$\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}.$$

Lösung: Wir schreiben f und f^2 für $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^2$. Sei $x,v\in\mathbb{R}^n$. Es gilt
$$\begin{aligned}\partial_v f^2(x)&=\frac{d}{dt}\|x+tv\|^2\Big|_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}\langle x+tv,x+tv\rangle\Big|_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}\big(\langle x,x\rangle+2t\langle x,v\rangle+t^2\langle v,v\rangle\big)\Big|_{t=0}\\&=2\langle x,v\rangle.\end{aligned}$$

Anderseits gilt nach der Produktregel

$$\partial_v f^2(x) = \frac{d}{dt}\|x + tv\|^2\Big|_{t=0} = 2\|x + tv\|\frac{d}{dt}\|x + tv\|\Big|_{t=0} = 2f(x)\partial_v f(x).$$

Es folgt

$$\partial_v f(x) = \frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|}.$$