Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

5. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 5.1 Wir betrachten $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ als reellen Vektorraum, versehen mit der euklidischen Topologie.

(a) Beweisen Sie, dass $\det : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein unendlich oft stetig differenzierbare (i.e. glatte) Abbildung ist.

(b) Wir definieren

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist.

(c) (i) Sei $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Wir schreiben $\mathrm{tr}(X)$ für die Spur von X. Zeigen Sie, dass die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p(t) := \det(I_n + tX) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

eine Polynomfunktion ist und dass es eine Polynomfunktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$p(t) = 1 + \mathrm{tr}(X)\,t + t^2 q(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Hinweis: Leibniz-Formel für die Determinante.

(ii) Beweisen Sie folgende Identität für die Ableitung:

$$D(\det)(I_n) = \mathrm{tr}.$$

(iii) Sei $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass

$$D(\det)(A)X = \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}X).$$

(iv) Sei $A_0 \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$D(\det)(A_0) = \lim_{\substack{A \to A_0 \\ A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}} \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}\,\cdot\,),$$

im Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ existiert.

(d) (i) Sei $f : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$f(A) = \det(A)A^{-1}.$$

Beweisen Sie, dass es eine eindeutige stetige Abbildung $F : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ gibt, sodass $F\big|_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} = f$. Zeigen Sie, dass F sogar glatt ist.
Hinweis: Cramersche Formel für inverse Matrizen.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus (d)–(i) die Glattheit der Inversion

$$\iota : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}); \qquad A \mapsto A^{-1}\,. \tag{1}$$

(e) Abschliessend geben wir einen alternativen Beweis für die Glattheit der Inversion.

(i) Sei $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die Operatornorm auf $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$ die Reihe

$$R(A) := \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

konvergent ist. Diese Reihe wird die *Neumann-Reihe* genannt.

(ii) Beweisen Sie, dass die Abbildung $A \mapsto R(I_n - A)$ differenzierbar in I_n ist.

(iii) Beweisen Sie, dass $R(I_n - A) = \iota(A) = A^{-1}$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$.

(iv) Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass (1) differenzierbar in A ist und verfizieren Sie die Formel

$$D\iota(A)X = -A^{-1} \cdot X \cdot A^{-1} \qquad \big(X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

Präsenzaufgabe 5.2 Seien $V_1, \dots V_n, W$ endlichdimensionale Vektorräume und $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$. Nehmen Sie an, dass f multilinear ist, dass heißt, dass f bezüglich jedes seiner Argumente eine lineare Abbildung ist. Bestimmen Sie die Ableitung Df von f.

Hausaufgabe 5.1 Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{pmatrix} x_1 + \sin(x_2) \\ x_1^3 x_2 \end{pmatrix}, \qquad g(x) := \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $Df(x)$ und $Dg(x)$ für $x \in \mathbb{R}^2$.

(b) Berechnen Sie $D(f \circ g)(x)$ und $Df(g(x)) \cdot Dg(x)$ für $x \in \mathbb{R}^2$

Wenn Sie die Ableitungen und die Matrixmultiplikation richtig berechnet haben, werden Sie sehen, dass $D(f \circ g) = (Df \circ g) \cdot Dg$ gilt. Diese Identität ist ein Beispiel für die Kettenregel in mehreren Veränderlichen.

Hausaufgabe 5.2 Sei $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Nehmen Sie an, dass es ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$Av = \lambda v.$$

Ein Vektor v mit dieser Eigenschaft nennt man einen Eigenvektor von A; die Zahl λ nennt man Eigenwert von A. Nehmen Sie weiter an, dass $\|v\| = 1$. Definiert sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \qquad (x, \mu) \mapsto \big(Ax - \mu x, \|x\|^2 - 1\big).$$

(a) Beweisen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

(b) Beweisen Sie die folgenden Identitäten für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Df(x,\mu)(y,0) &= \big(Ay - \mu y, 2\langle x, y\rangle\big) \\ Df(x,\mu)(0,1) &= (-x, 0). \end{aligned}$$

(c) Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine orhonormale Basis von $\mathbb{R}^n$ mit $v_1 = v$. Zeigen Sie, dass die Matrix von $A - \mu I$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ von der Form

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda - \mu & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & Av_2 - \mu v_2 & \ldots & Av_n - \mu v_n \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Matrix von $Df(v, \mu)$ für $\mu \in \mathbb{R}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}' = \{(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, 1)\}$ von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ der Form

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \lambda - \mu & & & & -1 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & Av_2 - \mu v_2 & \ldots & Av_n - \mu v_n & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist.

(e) Beweisen Sie die Identität

$$\det Df(v, \mu) = 2\frac{\det(A - \mu I)}{\lambda - \mu} \qquad (\mu \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda\}).$$

(f) Zeigen Sie

$$\det Df(v, \lambda) = \lim_{\mu \to \lambda} 2\frac{\det(A - \mu I)}{\lambda - \mu}.$$

Wir werden das Ergebnis dieser Aufgabe später verwenden um die Aussage zu beweisen, dass einfache Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren glatt von der Matrix A abhängen.

Hausaufgabe 5.3 Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right), & \text{falls } xy \neq 0 \\ 0, & \text{falls } xy = 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\partial_x \partial_y f(0, 0)$ und $\partial_y \partial_x f(0, 0)$.

(b) Ist Ihr Ergebnis im Widerspruch zu dem Satz von Schwarz? Begründen Sie Ihre Antwort.