Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

5. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 5.1 Wir betrachten $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ als reellen Vektorraum, versehen mit der euklidischen Topologie.

(a) Beweisen Sie, dass $\det : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein unendlich oft stetig differenzierbare (i.e. glatte) Abbildung ist.

(b) Wir definieren

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist.

(c) (i) Sei $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Wir schreiben $\mathrm{tr}(X)$ für die Spur von X. Zeigen Sie, dass die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p(t) := \det(I_n + tX) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

eine Polynomfunktion ist und dass es eine Polynomfunktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$p(t) = 1 + \mathrm{tr}(X)\, t + t^2 q(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(ii) Beweisen Sie folgende Identität für die Ableitung:

$$D(\det)(I_n) = \mathrm{tr}.$$

(iii) Sei $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass

$$D(\det)(A)X = \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}X).$$

(iv) Sei $A_0 \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$D(\det)(A_0) = \lim_{\substack{A \to A_0 \\ A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}} \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1} \cdot\,),$$

im Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ existiert.

(d) (i) Sei $f : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$f(A) = \det(A)A^{-1}.$$

Beweisen Sie, dass es eine eindeutige stetige Abbildung $F : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ gibt, sodass $F\big|_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} = f$. Zeigen Sie, dass F sogar glatt ist.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus (d)–(i) die Glattheit der Inversion

$$\iota : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}); \qquad A \mapsto A^{-1}\,. \tag{1}$$

(e) Abschliessend geben wir einen alternativen Beweis für die Glattheit der Inversion.

(i) Sei $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die Operatornorm auf $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$ die Reihe

$$R(A) := \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

konvergent ist. Diese Reihe wird die *Neumann-Reihe* genannt.

(ii) Beweisen Sie, dass die Abbildung $A \mapsto R(I_n - A)$ differenzierbar in I_n ist.

(iii) Beweisen Sie, dass $R(I_n - A) = \iota(A) = A^{-1}$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$.

(iv) Sei $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass (1) differenzierbar in A ist und verfizieren Sie die Formel

$$D\iota(A)X = -A^{-1} \cdot X \cdot A^{-1} \qquad \big(X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

Lösungen:

(a) Nach der Leibniz-Formel ist die Determinante eine Polynomfunktion der Matrixkoeffizienten. Polynomfunktionen sind glatt.

(b) Es gilt

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \det{}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Da det stetig und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ offen ist, ist $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ offen.

(c) (i) Nach der Leibniz-Regel für Determinante gilt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) A_{1\,\sigma(1)} \cdots A_{n\,\sigma(n)} \qquad \big(A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

Wenn $1 \leq i, j \leq n$, dann

$$(I + tX)_{i\,j} = \begin{cases} 1 + tX_{i\,i}, & \text{falls } i = j \\ tX_{i\,j}, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Sei $\sigma \in S_n$. Es gilt

$$(I_n + tX)_{1\,\sigma(1)} \cdots (I_n + tX)_{n\,\sigma(n)} = \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \sigma(i) \neq i}} tX_{i\,\sigma(i)} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \sigma(j) = j}} (1 + tX_{j\,\sigma(j)}) \right)$$

Sei

$$q_\sigma(t) := \mathrm{sign}(\sigma) \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \sigma(i) \neq i}} X_{i\,\sigma(i)} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \sigma(j) = j}} (1 + tX_{j\,\sigma(j)}) \right)$$

Dann ist q_σ eine Polynomfunktion und

$$\mathrm{sign}(\sigma)(I_n + tX)_{1\,\sigma(1)} \cdots (I_n + tX)_{n\,\sigma(n)} = t^{n_\sigma} q_\sigma(t),$$

wobei $n\sigma = \#\{i : 1 \leq i \leq n, \sigma(i) \neq i\}$.

Wenn $\sigma \in S_n$ nicht die Identität ist, dann gibt es $1 \leq i \leq n$, sodass $j := \sigma(i) \neq i$. Da σ bijektiv ist, gilt $\sigma(j) \neq \sigma(i)$. Es folgt, dass $n_\sigma \geq 2$.

Wenn $\sigma \in S_n$ die Indentät ist, dann gilt $n_\sigma = 0$ und

$$\begin{aligned}(I_n + tX)_{1\,\sigma(1)} \cdots (I_n + tX)_{n\,\sigma(n)} &= (1 + tX_{1\,1}) \cdots (1 + tX_{n\,n}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ \#J = k}} \prod_{i \in J} X_{i\,i} = 1 + t \sum_{i=1}^{n} X_{i\,i} + t^2 q_1(t),\end{aligned}$$

wobei

$$q_1(t) := \sum_{k=2}^{n} t^{k-2} \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ \#J = k}} \prod_{i \in J} X_{i\,i}$$

Es folgt, dass

$$\det(I_n + tX) = 1 + t \sum_{i=1}^{n} X_{i\,i} + t^2 q(t),$$

wobei

$$q(t) := q_1(t) + \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}} t^{n_\sigma - 2} q_\sigma(t).$$

Die Funktion q ist eine Polynomfunktion.

(ii) Sei $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Es gibt eine Polynomfunktion q, sodass

$$\det(I_n + tX) = 1 + t\mathrm{tr}(X) + t^2 q(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Darum gilt

$$\begin{aligned} D(\det)(I_n)X &= \frac{d}{dt} \det(I_n + tX)\big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \det(I_n + tX)\big|_{t=0} \\ &= \mathrm{tr}(X) + 2tq(t) + t^2 q'(t)\big|_{t=0} \\ &= \mathrm{tr}(X). \end{aligned}$$

(iii) Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Es gilt

$$\det(A + tX) = \det(A) \det(I_n + tA^{-1}X).$$

Nach Aufgabe (c–iii) gilt

$$\begin{aligned} D(\det)(A)X &= \frac{d}{dt} \det(A + tX)\big|_{t=0} \\ &= \det(A) \frac{d}{dt} \det(I_n + tA^{-1}X)\big|_{t=0} \\ &= \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}X). \end{aligned}$$

(iv) Die Determinanteabbildung det ist stetig differenzierbar. Darum gilt

$$D(\det)(A_0) = \lim_{\substack{A \to A_0 \\ A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}} D(\det)(A) = \lim_{\substack{A \to A_0 \\ A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}} \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1} \cdot).$$

(d) (i) Es folgt aus der Cramerschen Regel, dass $f(A) = \mathrm{adj}(A)$ für alle $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, wobei $\mathrm{adj}(A)$ die Adjunkte Matrix ist. Die adjungierte Matrix

$\mathrm{adj}(A)$ wird gegeben durch

$$\mathrm{adj}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass f zu eine Polynomfunktion F auf $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ erweitert. Polynomfunktionen sind glatt. Die Funktion F wird eindeutig von f bestimmt weil es für jede $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine konvergente Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit Grenzwert A gibt.

(ii) Es gilt

$$\iota = \frac{1}{\det} f$$

Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Da $\det(A) \neq 0$ folgt aus (a), dass $\frac{1}{\det}$ glatt ist in A. Nach (d–i) ist auch f glatt in A. Es folgt, dass ι glatt ist in A.

(e) (i) Wenn $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}^n$, dann $\|Ax\| \le \|A\|_{\mathrm{op}}\|x\|$. Wenn $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, dann

$$\|A \circ B\|_{\mathrm{op}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\|_{\mathrm{op}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}.$$

Sei jetzt $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ fest. Wir nehmen an, dass $\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$. Es gilt

$$\|A^k\|_{\mathrm{op}} \le \|A\|_{\mathrm{op}}^k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

und darum gilt für alle $1 \le m \le n$

$$\|\sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{l=0}^{m} A^l\|_{\mathrm{op}} \le \sum_{k=m+1}^{n} \|A\|_{\mathrm{op}}^k$$

Da die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|_{\mathrm{op}}^k$ konvergent ist, ist $(\sum_{k=0}^{n} \|A\|_{\mathrm{op}}^k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Es folgt, dass es für jede $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $m, n > N$

$$\|\sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{l=0}^{m} A^l\|_{\mathrm{op}} < \epsilon.$$

Damit ist bewiesen, dass $(\sum_{k=0}^{n} A^k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist. Da $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ vollständig ist, ist die Folge konvergent.

(ii) Sei $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\|R\big(I_n - (I_n + X)\big) - R(0) - (-X)\|_{\mathrm{op}}}{\|X\|_{\mathrm{op}}} &= \frac{\|R(-X) - I_n + X\|_{\mathrm{op}}}{\|X\|_{\mathrm{op}}} \\ = \frac{\big\|\sum_{k=2}^{\infty}(-X)^k\big\|_{\mathrm{op}}}{\|X\|_{\mathrm{op}}} &\le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|X\|_{\mathrm{op}}^k}{\|X\|_{\mathrm{op}}} = \sum_{k=2}^{\infty} \|X\|_{\mathrm{op}}^{k-1} \\ = \|X\|_{\mathrm{op}} \sum_{k=0}^{\infty} \|X\|_{\mathrm{op}}^k &\to 0 \quad (X \to 0). \end{aligned}$$

Es folgt, dass $R(I_n - \cdot\,)$ differenzierbar in I_n ist und

$$DR(I_n - \cdot\,)(I_n)X = -X \qquad \big(X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} AR(I_n - A) - R(I_n - A) &= -(I_n - A))R(I_n - A) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}(I_n - A)^k \\ &= I_n - R(I_n - A) \end{aligned}$$

und darum

$$AR(I_n - A) = I_n.$$

(iv) Da $R(I_n - \cdot\,)$ und ι auf eine offen Umgebung von I_n übereinstimmen, ist ι differenzierbar in I_n und

$$D\iota(I_n)X = DR(I_n - \cdot\,)(I_n)X = -X \qquad \big(X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Für hinreichend kleine $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\big(\iota(A + tX) - \iota(A)\big) &= \frac{1}{t}\big((A + tX)^{-1} - A^{-1}\big) \\ &= \frac{1}{t}\Big(\big(A(I_n + tA^{-1}X)\big)^{-1} - A^{-1}\Big) \\ &= \frac{1}{t}\big(\iota(I_n + tA^{-1}X) - \iota(I_n)\big) \cdot A^{-1}. \end{aligned}$$

Rechts-Multiplikation mit A^{-1} ist stetig. Da

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\big(\iota(I_n + tA^{-1}X) - \iota(I_n)\big) = D\iota(I_n)(A^{-1}X) = -A^{-1}X,$$

folgt, dass

$$D\iota(A)(X) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\iota(A{+}tX){-}\iota(A)\big) = D\iota(I_n)(A^{-1}X){\cdot}A^{-1} = -A^{-1}{\cdot}X{\cdot}A^{-1}.$$

Präsenzaufgabe 5.2 Seien $V_1, \dots V_n, W$ endlichdimensionale Vektorräume und $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$. Nehmen Sie an, dass f multilinear ist, dass heißt, dass f bezüglich jedes seiner Argumente eine lineare Abbildung ist. Bestimmen Sie die Ableitung Df von f.

Die Aufgabe wird am Donnerstag 21. Mai besprochen.