Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

6. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 6.1 (Fixpunktsatz von Banach) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $f : X \to X$ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $0 \leq \epsilon < 1$, dass heißt

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq \epsilon\, d(x, y) \qquad \big(x, y \in X\big).$$

Ein Punkt $x \in X$ ist ein Fixpunkt von f wenn $f(x) = x$ gilt. Beweisen Sie, dass f genau einen Fixpunkt besitzt.
Hinweis: Sei $x_0 \in X$. Für $n \in \mathbb{N}$, sei $x_n \in x$ rekursiv definiert durch

$$x_n = f(x_{n-1}) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Beweisen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Welche Eigenschaften hat der Limes dieser Folge?

Präsenzaufgabe 6.2 Sei $X = (0, \infty)$ versehen mit der üblichen euklidischen Metrik. Sei $f : X \to X$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2}x \qquad (x \in X).$$

(a) Zeigen Sie, dass f lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante kleiner 1.

(b) Besitzt f Fixpunkte?

(c) Ist Ihr Ergebnis im Widerspruch zu dem Fixpunktsatz von Banach?

Präsenzaufgabe 6.3 (Stetiger Umkehrsatz) Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und sei $g : U \to \mathbb{R}^n$ eine lipschitzstetige Funktion mit Lipschitzkonstante $\epsilon < 1$. Wir definieren

$$f : U \to \mathbb{R}^n; \qquad x \mapsto x - g(x).$$

(a) Beweisen Sie die Formel

$$\|f(x) - f(y)\| \geq (1 - \epsilon)\|x - y\| \qquad (x, y \in U).$$

  (i) Folgern Sie, dass f injektiv ist.
  (ii) Sei $V := f(U)$ versehen mit der Relativtopologie. Folgern Sie, dass $f : U \to V$ ein Homöomorphismus ist.

(b) Für $y \in \mathbb{R}^n$, sei $\Phi_y : U \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\Phi_y(x) = x - f(x) + y = g(x) + y \qquad (x \in U).$$

Beweisen Sie, dass Φ_y lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante ϵ ist.

Sei $x_0 \in U$ und sei $r > 0$, sodass $B(x_0, r) \subseteq U$.

(c) Nehmen Sie an, dass $y \in B\big(f(x_0), (1 - \epsilon)r\big)$. Beweisen Sie, dass

$$\Phi_y\Big(B(x_0, r)\Big) \subseteq B(x_0, r).$$

Zeigen Sie, dass Φ_y genau ein Fixpunkt in $B(x_0, r)$ besitzt.

(d) Zeigen Sie, dass $x \in U$ genau dann ein Fixpunkt von Φ_y ist, wenn $f(x) = y$.

(e) Folgern Sie, dass $B\big(f(x_0), (1-\epsilon)r\big) \subseteq f\Big(B(x_0, r)\Big)$.

(f) Folgern Sie, dass V offen ist.

Präsenzaufgabe 6.4 Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und sei $f : U \to V$ eine C^1-Abbildung. Definieren Sie

$$Tf : U \times \mathbb{R}^n \to V \times \mathbb{R}^p; \qquad (x, X) \mapsto \big(f(x), Df(x)X\big).$$

Die Abbildung Tf heißt die Tangentialabbildung von f. Sei weiter $g : V \to \mathbb{R}^q$ eine C^1-Abbildung. Beweisen Sie dass die Kettenregel für f und g umgeschrieben werden kann zur folgenden Identität der Tangentialabbildungen Tf und Tg:

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf.$$

Präsenzaufgabe 6.5 Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4 f\big((x, y), 0\big)$ vierter Ordnung in 0 von der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x, y) \mapsto \sin(xy)e^{y \sin(x)}.$$

Geben Sie eine Abschätzung für $R_4\big((x, y), 0\big) = f(x, y) - T_4 f\big((x, y), 0\big)$.

Hausaufgabe 6.1 (Homogene Funktionen) Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, dass f (positiv) homogen vom Grad $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $t > 0$

$$f(tx) = t^\lambda f(x).$$

(a) Nehmen Sie an, dass f differenzierbar und homogen vom Grad λ ist. Beweisen Sie Eulers Identität:

$$\langle x, \mathrm{grad} f(x) \rangle = \lambda f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \tag{1}$$

Hinweis: Betrachten Sie für ein festes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(t) = f(tx)$. Beweisen Sie, dass $g'(t) = Df(x)x$.

(b) Umgekehrt, beweisen Sie, dass f homogen von Grad λ ist, wenn f differenzierbar ist und die Differenzialgleichung (1) erfüllt.
Hinweis: Berechnen Sie für ein festes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Ableitung der Funktion

$$h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}; \qquad t \mapsto t^{-\lambda} f(tx).$$

Hausaufgabe 6.2 Sei $X = [0, \infty)$ und sei $f : X \to X$ gegeben durch

$$f(x) = x + e^{-x} \qquad (x \in X).$$

(a) Beweisen Sie, dass f eine Kontraktion ist, d. h.

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \qquad (x, y \in X, x \neq y).$$

(b) Besitzt f Fixpunkte?

(c) Ist Ihr Ergebnis im Widerspruch zu dem Fixpunktsatz von Banach?

Hausaufgabe 6.3 (Newtonverfahren) Sei V eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : V \to \mathbb{R}^n$ eine C^2-Abbildung. Sei $x_0 \in V$ und $\delta > 0$, sodass der abgeschlossene Ball U in $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt x_0 und Radius δ enthalten ist in V. Wir nehmen an, dass f eine Nullstelle in U besitzt. Das hier beschriebene Verfahren um die Nullstelle zu finden, heißt das Newtonverfahren. Wir brauchen dafür die folgenden Bedingungen.

1. Für alle $x \in U$ ist $Df(x)$ invertierbar und es gibt ein $c_1 > 0$, sodass

$$\|Df(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \leq c_1 \qquad (x \in U),$$

2. Es gibt ein $c_2 > 0$, sodass

$$\|D^2 f(x)\|_{\mathrm{op}} < c_2 \qquad (x \in U),$$

3. $c_1 \Big(\|f(x_0)\| + \frac{1}{2} c_2 \delta^2 \Big) \leq \delta$,

4. $\frac{1}{2} c_1^2 c_2 \|f(x_0)\| < 1$.

Nach etwaige Verkleinerung von δ und Wahl von x_0 hinreichend nah an der Nullstelle, können diese Bedingungen immer erfüllt werden, wenn für alle $x \in V$ die Lineare Abbildung $Df(x)$ invertierbar ist.

(a) Sei $x \in U$. Sei $R_1(x, x_0) := f(x_0) - f(x) - Df(x)(x - x_0)$. Betrachten Sie die Taylorformel mit Stützpunkt x und die Abschätzung für $R_1(x, x_0)$ und beweisen Sie, dass

$$\|x_0 - x + Df(x)^{-1}\big(f(x)\big)\| \leq c_1 \|Df(x)(x_0 - x) + f(x)\| \leq \delta.$$

Folgern Sie, dass das Bild der Abbildung

$$F : U \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto x - Df(x)^{-1}\big(f(x)\big)$$

in U erhalten ist.

Wir definieren rekursiv

$$x_{k+1} = F(x_k) \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$ und betrachten Sie die Taylorentwicklung erster Ordnung von f im Punkt x_k. Beweisen Sie, dass es ein $\xi \in U$ gibt, sodass

$$f(x_{k+1}) = \frac{1}{2} D^2 f(\xi)\Big(Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big), Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big)\Big)$$

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die folgende Ungleichung gilt

$$\|f(x_{k+1})\| \leq \frac{c_1^2 c_2}{2} \|f(x_k)\|^2$$

(c) Beweisen Sie mit Induktion, dass

$$\|f(x_k)\| \leq \frac{2}{c_1^2 c_2} \epsilon^{2^k} \qquad (k \in \mathbb{N}_0),$$

wobei $\epsilon = \frac{c_1^2 c_2}{2} \|f(x_0)\|$.

(d) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \|Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big)\| \leq \frac{2}{c_1 c_2} \epsilon^{2^k}.$$

(e) Beweisen Sie, dass die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent ist und dass der Limes dieser Folge eine Nullstelle von f in U ist.