Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

9. Übungsblatt

Hausaufgabe 9.1 Sei Γ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, sodass $\Gamma \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \{0\} \times \mathbb{R}$. Sei M die Drehfläche von Γ um die z-Achse, dass heißt die Fläche die durch Rotation von Γ um die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entsteht. Nehmen Sie an, dass $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Karte ist von Γ, das heißt, dass γ eine injektive C^1-Kurve $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist, sodass $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $\gamma^{-1} : \Gamma \to \mathbb{R}$ ist stetig und $\Gamma = \mathrm{Im}(\gamma)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (t, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos(\phi) \\ \gamma_1(t)\sin(\phi) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$$

surjektiv auf M abbildet.

(b) Beweisen Sie, dass es für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Teilmenge W von $\mathbb{R}^2$ gibt, sodass $x \in f(W)$ mit $Df(t, \phi)$ injektiv für alle $(t, \phi) \in W$.

(c) Sei $(t, \phi) \in \mathbb{R}^2$ und $x = f(t, \phi)$. Beweisen Sie, dass

$$\phi = 2\arctan\left(\frac{x_2}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right),$$

wenn $\phi \in (-\pi, \pi)$ und

$$\phi = 2\mathrm{arccot}\left(\frac{x_2}{-x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right),$$

wenn $\phi \in (0, 2\pi)$.

(d) Beweisen Sie, dass es für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Teilmenge W von $\mathbb{R}^2$ gibt, sodass die Einschränkung von f auf W injektiv und $f^{-1} : f(W) \to W$ stetig ist.

(e) Folgern Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(f) Sei $t \in \mathbb{R}$ und $p = \gamma(t) \in m$. Bestimmen Sie den Tangentialraum T_pM.

Lösung:

(a) Wenn $x \in M$, dann gibt es eine Drehung O um die z-Achse, sodass $Ox \in \Gamma$. Sei $t \in \mathbb{R}$, sodass $Ox = \gamma(t)$. Für jede Drehung um die z-Achse gibt es ein ϕ, sodass die Matrix von O bezüglich die Standardbasis gleich

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Es gilt

$$x = O^{-1}\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ 0 \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} = f(t,\phi).$$

(b) Sei $t, \phi \in \mathbb{R}^2$. Es gilt

$$Df(t,\phi) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t)\cos(\phi) & -\gamma_1(t)\sin(\phi) \\ \gamma_1'(t)\sin(\phi) & \gamma_1(t)\cos(\phi) \\ \gamma_3'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn $u \in \ker Df(t,\phi)$, dann gilt $\gamma_3'(t)u_1 = 0$. Es folgt, dass $\gamma_3'(t) = 0$ oder $u_1 = 0$. Wenn $\gamma_3'(t) = 0$, dann $\gamma_1'(t) \neq)$ da $\gamma'(t) \neq 0$. Weil

$$\gamma_1'(t)\cos(\phi)u_1 - \gamma_1(t)\sin(\phi)u_2 = \gamma_1'(t)\sin(\phi)u_1 + \gamma_1(t)\cos(\phi)u_2 = 0,$$

gilt

$$\gamma_1'(t)u_1 = \gamma_1'(t)\cos^2(\phi)u_1 - \gamma_1(t)\sin(\phi)\cos(\phi)u_2 + \gamma_1'(t)\sin^2(\phi)u_1 + \gamma_1(t)\cos(\phi)\sin(\phi)u_2 = 0.$$

Es folgt $u_1 = 0$. Wenn $u_1 = 0$, dann $\gamma_1(t)\sin(\phi)u_2 = \gamma_1(t)\cos(\phi)u_2 = 0$. Es folgt

$$\gamma_1(t)u_2 = \gamma_1(t)\cos^2(\phi)u_2 + \gamma_1(t)\sin^2(\phi)u_2 = 0$$

und damit $u_2 = 0$. Dies beweisst, dass $Df(t,\phi)$ injektiv ist für alle $t, \phi \in \mathbb{R}$.

(c) Sei $(t,\phi) \in \mathbb{R}^2$ und $x := f(t,\phi)$. Wenn $\phi \in (-\pi, \pi)$, dann

$$\frac{x_2}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{\gamma_1(t)\sin(\phi)}{\gamma_1(t)\cos(\phi) + \sqrt{\gamma_1(t)^2}} = \frac{\gamma_1(t)\sin(\phi)}{\gamma_1(t)\cos(\phi) + \gamma_1(t)} = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)+1} = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

und darum

$$\phi = 2\arctan\left(\frac{x_2}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right).$$

Wenn $\phi \in (0, 2\pi)$, dann folgt auf gleiche Weise

$$\frac{x_2}{-x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{\sin(\phi)}{-\cos(\phi)+1} = \cot\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

und darum

$$\phi = 2\mathrm{arccot}\left(\frac{x_2}{-x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right).$$

(d) Seien $V_1 := \{x \in M : x_2 \neq 0 \text{ oder } x_1 > 0\}$ und $V_2 := \{x \in M : x_2 \neq 0 \text{ oder } x_1 < 0\}$. Wir definieren die Abbildungen

$$g_1 : V_1 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \gamma^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ 2\arctan\left(\frac{x_2}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_1^2}}\right) \end{pmatrix}$$

$$g_1 : V_1 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \gamma^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ 2\mathrm{arccot}\left(\frac{x_2}{-x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \end{pmatrix}$$

Da γ^{-1} stetig ist, sind g_1 und g_2 stetige Abbildungen. Seien $W_1 = g_1(V_1)$ und $W_2 = g_2(V_2)$. Dann sind g_1 und g_2 die Inverse Abbildungen von $f\big|_{W_1} : W_1 \to V_1$ und $f\big|_{W_2} : W_2 \to V_2$.

(e) Die Abbildung f erfüllt die Bedingungen in Proposition 3.4.1 im Skript von Soergel. Es folgt, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

(f) Das Bild von $Df(t,0)$ ist erhalten in $T_p(M)$. Da beide Räume zwei dimensional sind, sind sie gleich. Es folgt

$$T_pM = \mathrm{Im}\Big(Df(t,0)\Big) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ 0 \\ \gamma_3'(t) \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T_p\Gamma \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 9.2 Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, sei $\Phi_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\Phi_n(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi_{n-1})\cos(\phi_{n-2})\ldots\cos(\phi_2)\cos(\phi_1) \\ r\cos(\phi_{n-1})\cos(\phi_{n-2})\ldots\cos(\phi_2)\sin(\phi_1) \\ r\cos(\phi_{n-1})\cos(\phi_{n-2})\ldots\sin(\phi_2) \\ \vdots \\ r\cos(\phi_{n-1})\cos(\phi_{n-2})\sin(\phi_{n-3}) \\ r\cos(\phi_{n-1})\sin(\phi_{n-2}) \\ r\sin(\phi_{n-1}) \end{pmatrix} \qquad \big((r,\phi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}\big).$$

Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $\det D\Phi_n(r,\phi)$.

Lösung: Wir werden mit Induktion nach n beweisen, dass für $n \geq 3$

$$\det D\Phi_n(r,\phi) = r^{n-1}\cos^{n-2}(\phi_{n-1})\cos^{n-3}(\phi_{n-2})\cdots\cos(\phi_2) \qquad \big(r > 0, \phi \in \mathbb{R}^{n-1}\big). \tag{1}$$

Es gilt für alle $r > 0$ und $\phi \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\det D\Phi_3(r,\phi) &= \det\begin{pmatrix} \cos(\phi_2)\cos(\phi_1) & -r\cos(\phi_2)\sin(\phi_1) & -r\sin(\phi_2)\cos(\phi_1) \\ \cos(\phi_2)\sin(\phi_1) & r\cos(\phi_2)\cos(\phi_1) & -r\sin(\phi_2)\sin(\phi_1) \\ \sin(\phi_2) & 0 & r\cos(\phi_2) \end{pmatrix} \\
&= \sin(\phi_2)\det\begin{pmatrix} -r\cos(\phi_2)\sin(\phi_1) & -r\sin(\phi_2)\cos(\phi_1) \\ r\cos(\phi_2)\cos(\phi_1) & -r\sin(\phi_2)\sin(\phi_1) \end{pmatrix} \\
&\quad + r\cos(\phi_2)\det\begin{pmatrix} \cos(\phi_2)\cos(\phi_1) & -r\cos(\phi_2)\sin(\phi_1) \\ \cos(\phi_2)\sin(\phi_1) & r\cos(\phi_2)\cos(\phi_1) \end{pmatrix} \\
&= r^2\cos(\phi_2)\sin^2(\phi_2) + r^2\cos^3(\phi_2) \\
&= r^2\cos(\phi_2)
\end{aligned}$$

Hiermit ist die Aussage bewiesen für $n = 3$. Jetzt nehmen wir an, dass (1) wahr ist für ein $n \geq 3$. Sei $r > 0$, $\phi \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\phi_n \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$D\Phi_{n+1}(r,\phi,\phi_n) = \left(\begin{array}{c|c|c} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\phi_n)D_r\Phi_n(r,\phi) & \cos(\phi_n)D_\phi\Phi_n(r,\phi) & -\sin(\phi_n)\Phi_n(r,\phi) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \sin(\phi_n) & 0\ldots0 & r\cos(\phi_n) \end{array}\right)$$

und darum

$$\det D\Phi_{n+1}(r,\phi,\phi_n) = (-1)^{n-1}\sin(\phi_n)\det\left(\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \cos(\phi_n)D_\phi\Phi_n(r,\phi) & -\sin(\phi_n)\Phi_n(r,\phi) \\ \vdots & \vdots \end{array}\right)$$
$$+ r\cos(\phi_n)\det\left(\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \cos(\phi_n)D_r\Phi_n(r,\phi) & \cos(\phi_n)D_\phi\Phi_n(r,\phi) \\ \vdots & \vdots \end{array}\right).$$

Da $\Phi_n(r,\phi) = rD_r\Phi_n(r,\phi)$ folgt nach Verwechselung der Spalten in die erste Determinante

$$\begin{aligned}\det D\Phi_{n+1}(r,\phi,\phi_n) &= r\sin^2(\phi_n)\cos^{n-1}(\phi_n)\det D\Phi_n(r,\phi) + r\cos^{n+1}(\phi_n)\det D\Phi_n(r,\phi)\\ &= r\cos^{n-1}(\phi_n)\det D\Phi_n(r,\phi).\end{aligned}$$

Nach annahme gilt (1). Es folgt

$$\det D\Phi_{n+1}(r,\phi,\phi_n) = r^n\cos^{n-1}(\phi_n)\cos^{n-2}(\phi_{n-1})\cos^{n-3}(\phi_{n-2})\cdots\cos(\phi_2).$$

Hausaufgabe 9.3 Sei $M := \{(t,x,y)\in\mathbb{R}^3 : t^2 - x^2 - y^2 = 1\}$. Bestimmen Sie die Extrema von

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad (t,x,y)\mapsto e^{-t^2}(x+2y)$$

auf M. Liegen in den kritischen Punkte Minima oder Maxima vor?

Lösung: Wir definieren $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(t,x,y)\mapsto t^2-x^2-y^2$. Sei $(t,x,y)\in M$ eine kritische Stelle von f beschränkt auf M. Es gibt ein $\lambda\in\mathbb{R}$, sodass

$$0 = Df(t,x,y) - \lambda Dg(t,x,y) = \big(-2t(x+2y)e^{-t^2}, e^{-t^2}, 2e^{-t^2}\big) - \lambda\big(2t,-2x,-2y\big)$$

Da $-2\lambda x = e^{-t^2}$ und $-2\lambda y = 2e^{-t^2}$, gilt $y = 2x$ und $\lambda = -\frac{1}{2}e^{-t^2}\frac{1}{x}$. Aus die Gleichung $-2t(x+2y)e^{-t^2} = 2\lambda t$ folgt

$$10x = \frac{1}{x}$$

und damit $x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ und $y = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}$. Die Unbekannte t wird jetzt bis auf Zeichen eindeutig bestimmt durch die Gleichung $t^2-x^2-y^2 = 1$, also $t = \sqrt{\frac{3}{2}}$ oder $t = -\sqrt{\frac{3}{2}}$. Es gibt insgesammt vier kritische Stellen:

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}}\right),\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{-2}{\sqrt{10}}\right),\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}}\right),\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{-2}{\sqrt{10}}\right).$$

Wenn $(t,x,y)\in M$, dann $x^2+y^2<t^2$. Es folgt, dass $f(t,x,y)$ gegen 0 konvergiert wenn $(t,x,y)\in M$ in Länge nach ∞ neigt. Dies impliziert, dass f ihr Maximum und Minumum beide auf $M_+ := \{(t,x,y)\in M : t>0\}$ und $M_- := \{(t,x,y)\in M : t<0\}$ annimmt. Weil sowohl auf M_+ als auf M_- genau zwei kritische Stellen gibt ist eine das Maximum und das Andere das Minimum. Die Funktion nimmt darum ihr Maximum auf M an in $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ und ihr Minimum in $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$.