

## Analysis 2

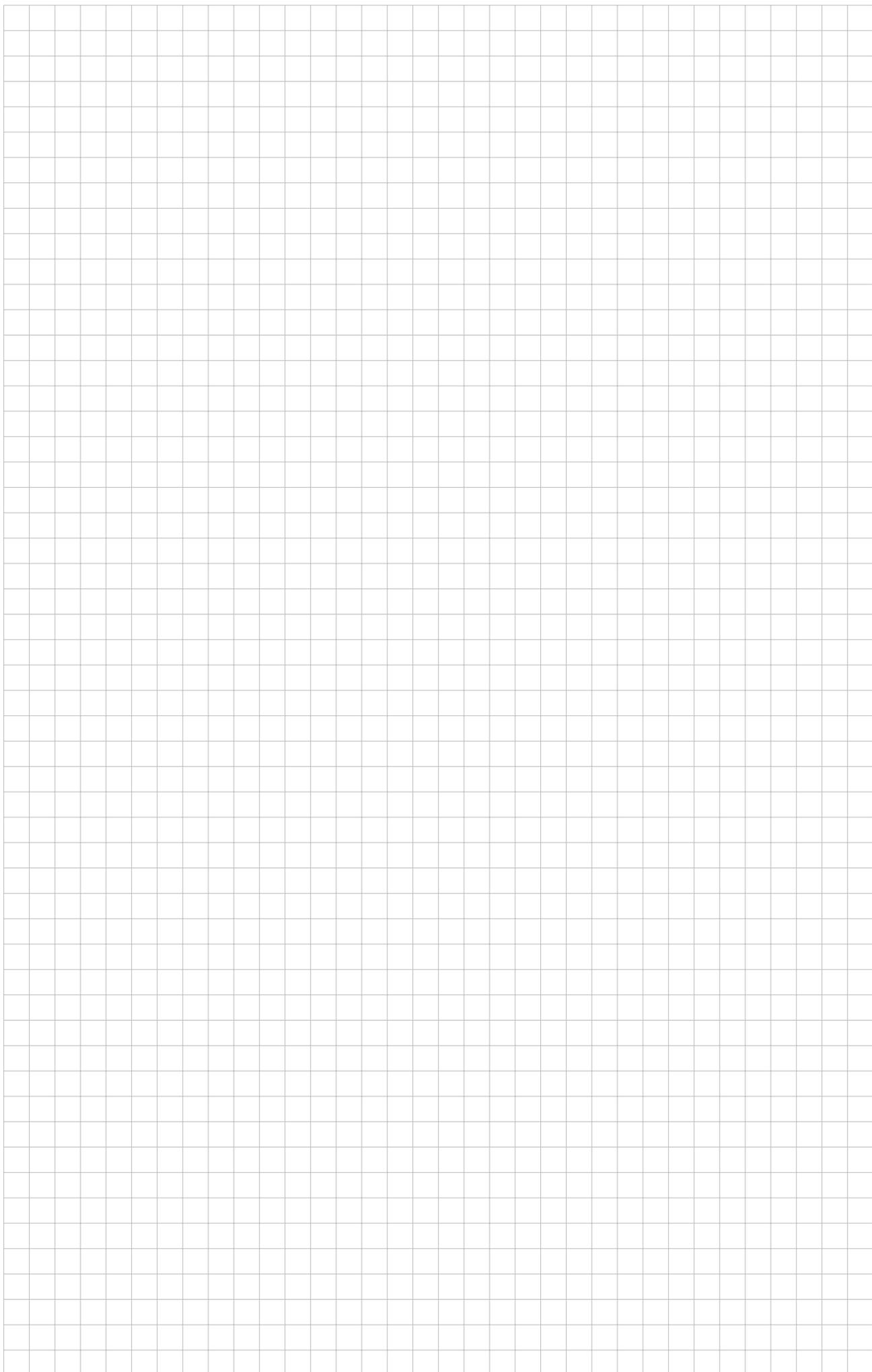
|                 |
|-----------------|
| Name:           |
| Matrikelnummer: |

Wichtige Informationen:

- Alle Hilfsmittel in Papierform sind erlaubt; *elektronische Hilfsmittel sind verboten.*
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben mit unterschiedlicher Punktzahl und insgesamt 60 Punkten. Man hat bestanden, wenn man mindestens 30 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

---

| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | Summe |
|----|----|----|----|----|-------|
| 10 | 12 | 11 | 17 | 10 | 60    |
|    |    |    |    |    |       |



**Aufgabe 1:** (10 Punkte)

Gegeben sei die Menge

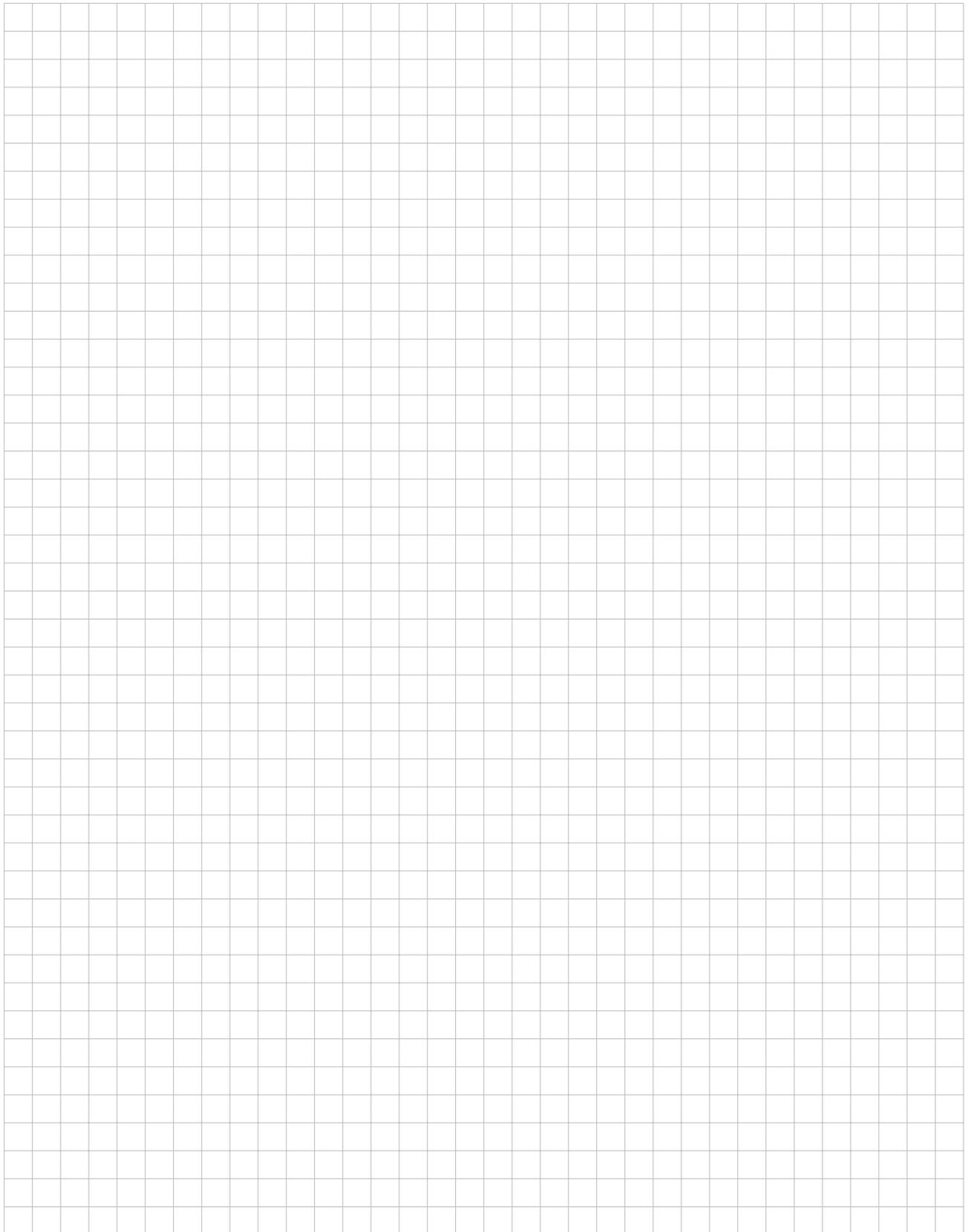
$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_3| \leq 5, x_3^2 + 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2 + 4\}.$$

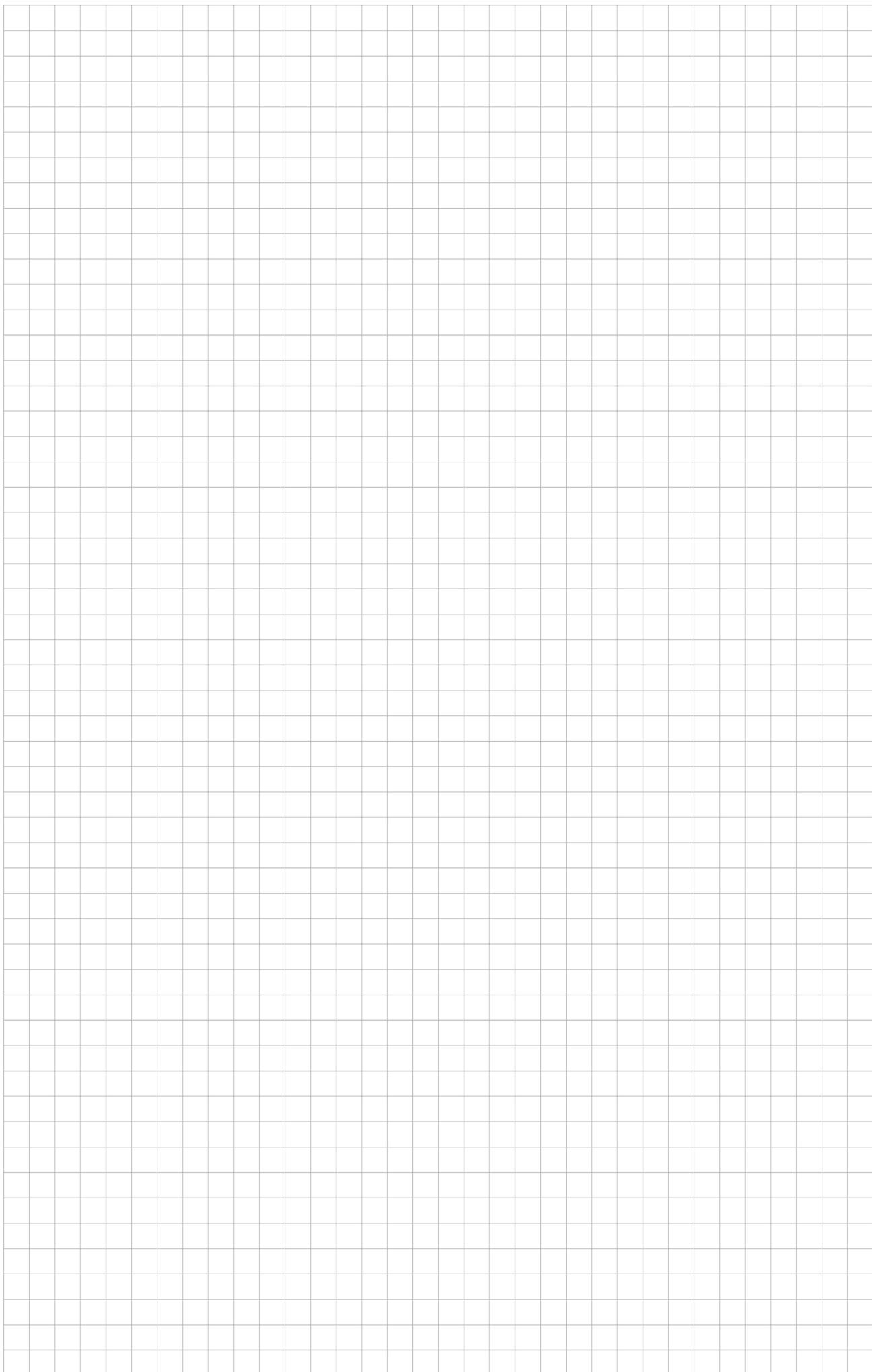
(a) Skizzieren Sie  $M$ .

(3 P.)

(b) Bestimmen Sie  $\text{vol}_{\mathbb{R}^3}(M)$ .

(7 P.)





**Aufgabe 2:** (12 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

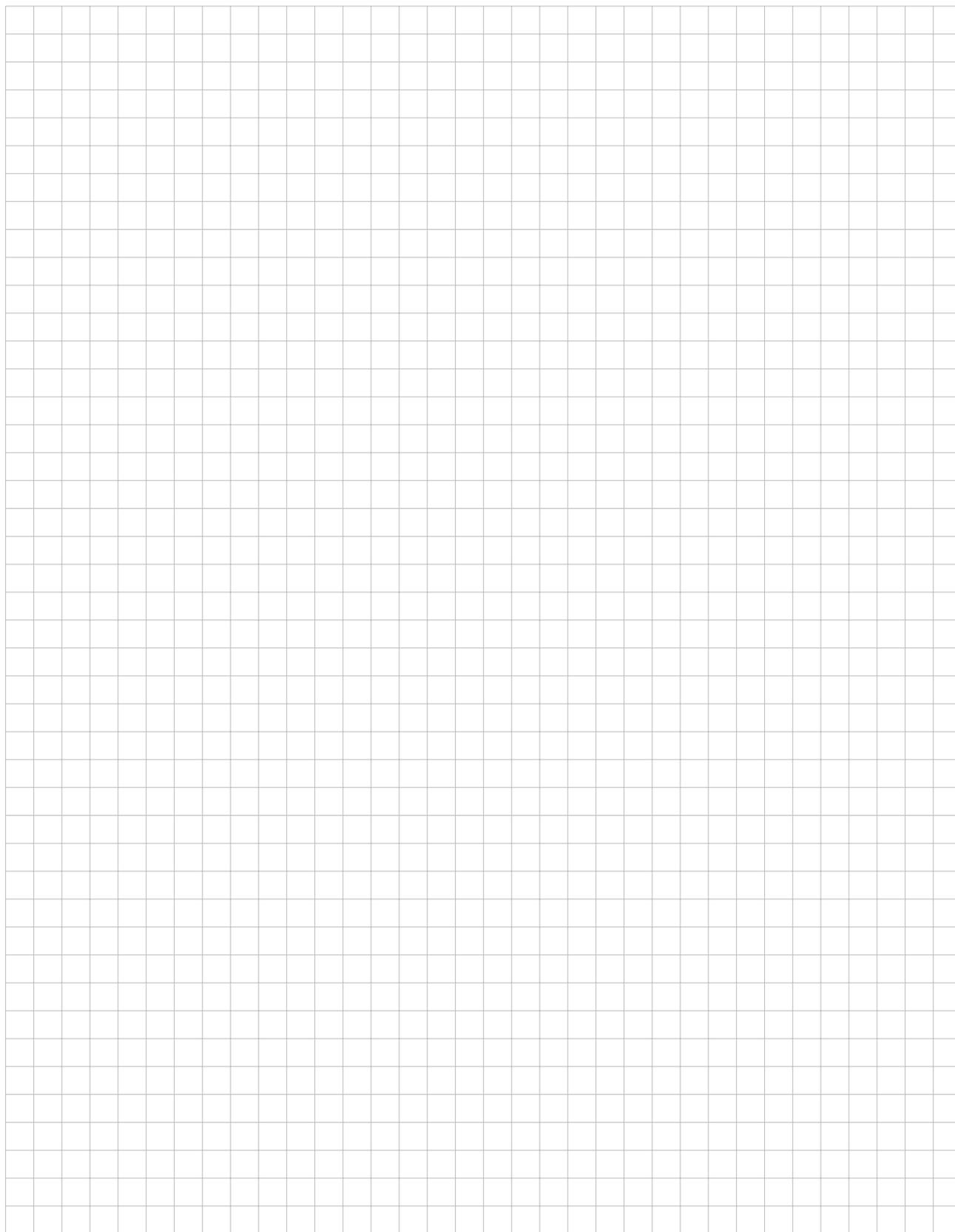
(a) Jeder metrische Raum  $(X, d)$  ist Hausdorffsch. (4 P.)

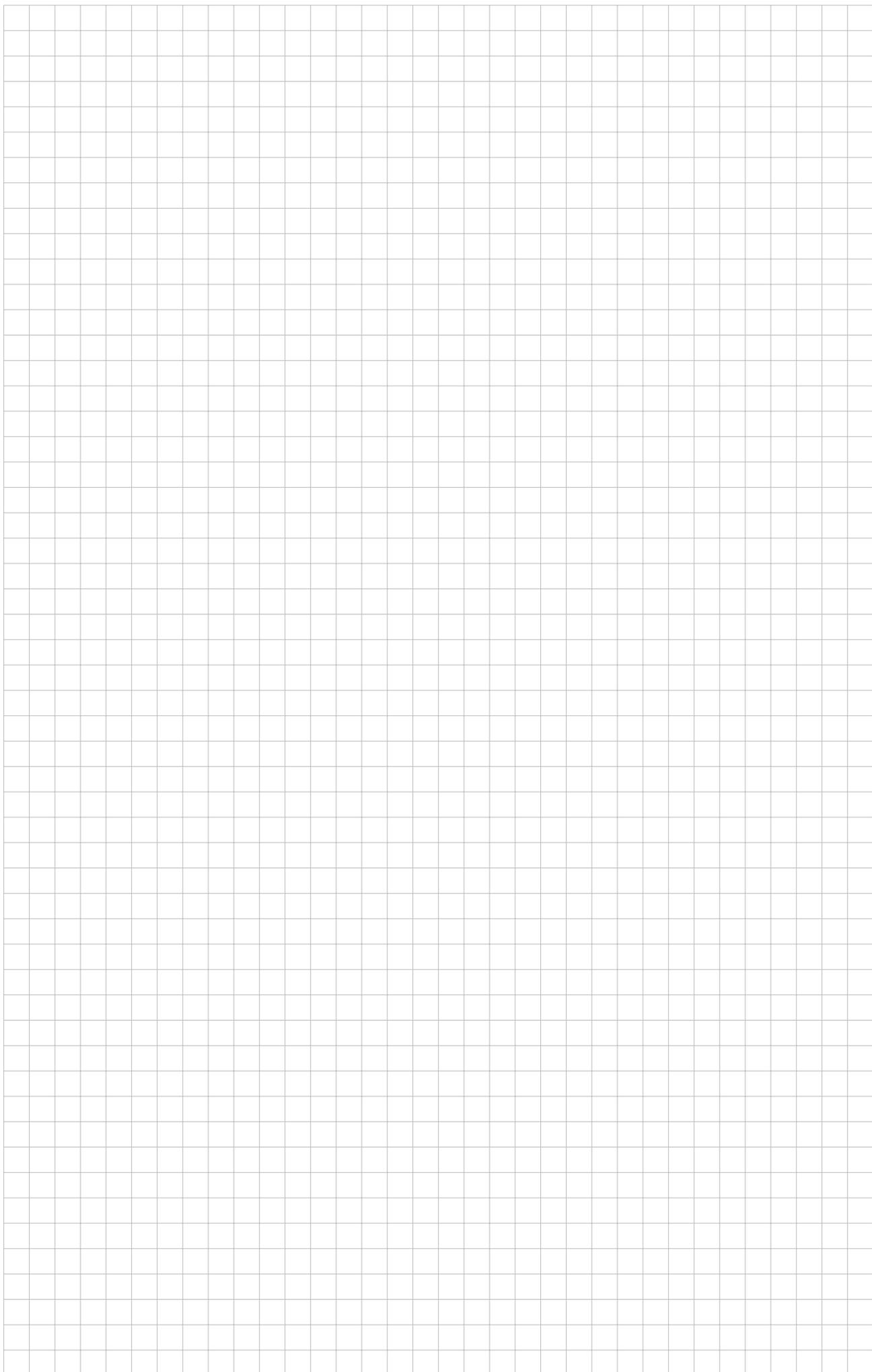
(b) In einem metrischen Raum  $(X, d)$  sind offene Kugeln

$$B_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\} \quad (a \in X, r > 0)$$

niemals abgeschlossen. (4 P.)

(c) Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Dann bildet  $f$  offene Mengen auf offene Mengen ab. (4 P.)





**Aufgabe 3:** (11 Punkte)

Betrachtet sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto e^x \cos y + e^y \cos x.$$

(a) Zeigen Sie, daß

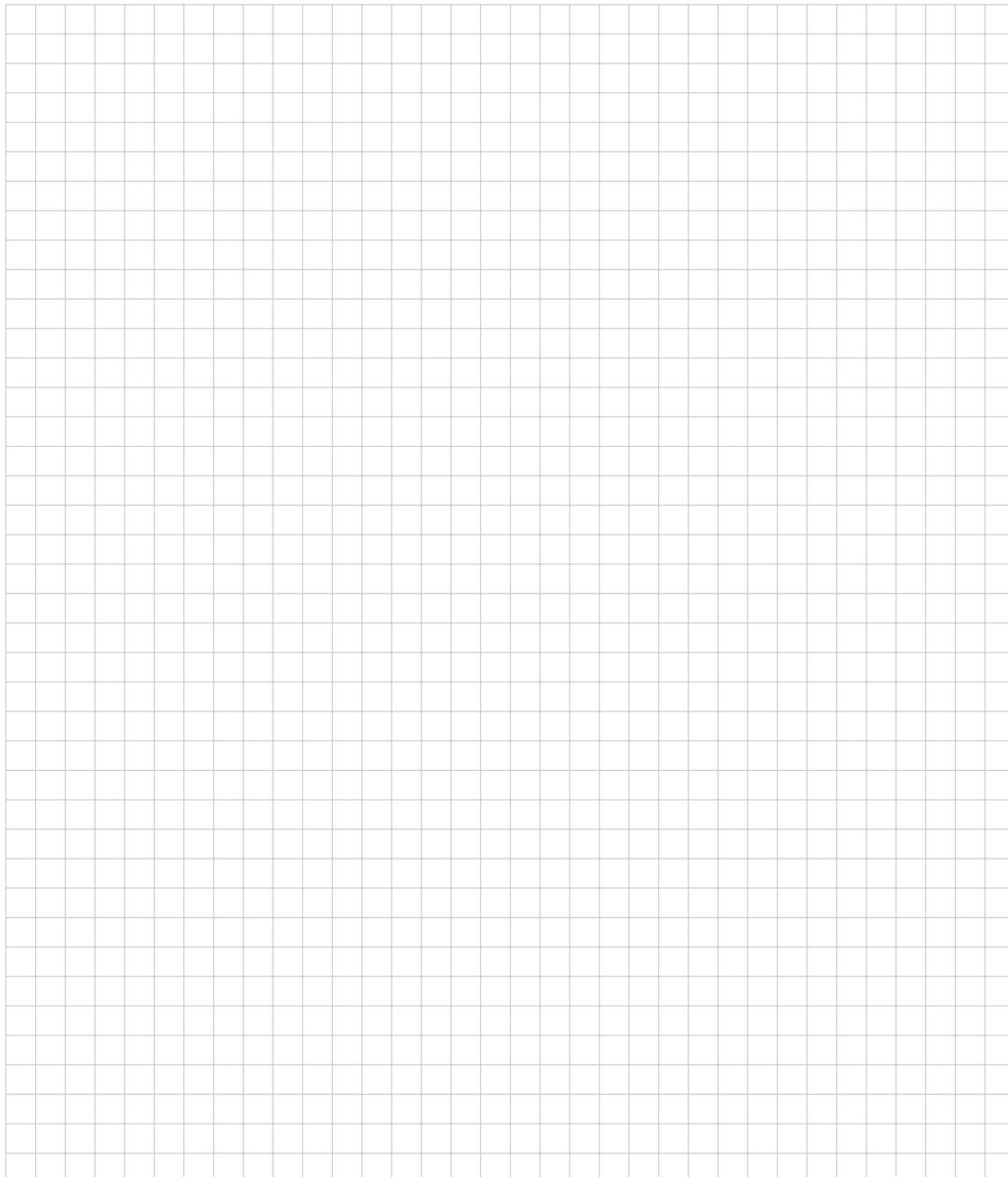
$$\det [\text{Hess } f(x, y)] \leq 0$$

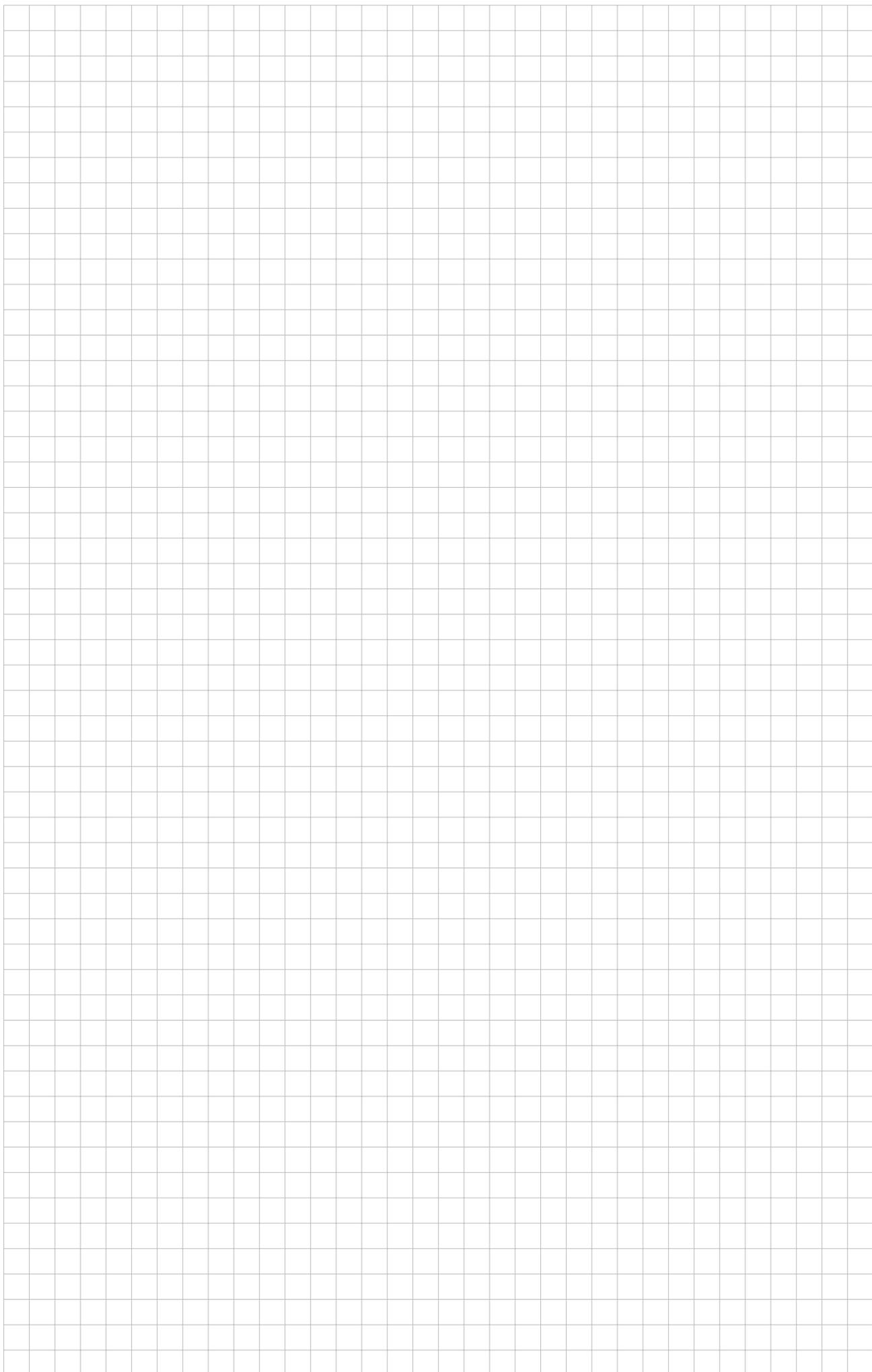
für alle  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

(4 P.)

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), daß  $f$  keine lokalen Extremstellen besitzt.

(7 P.)



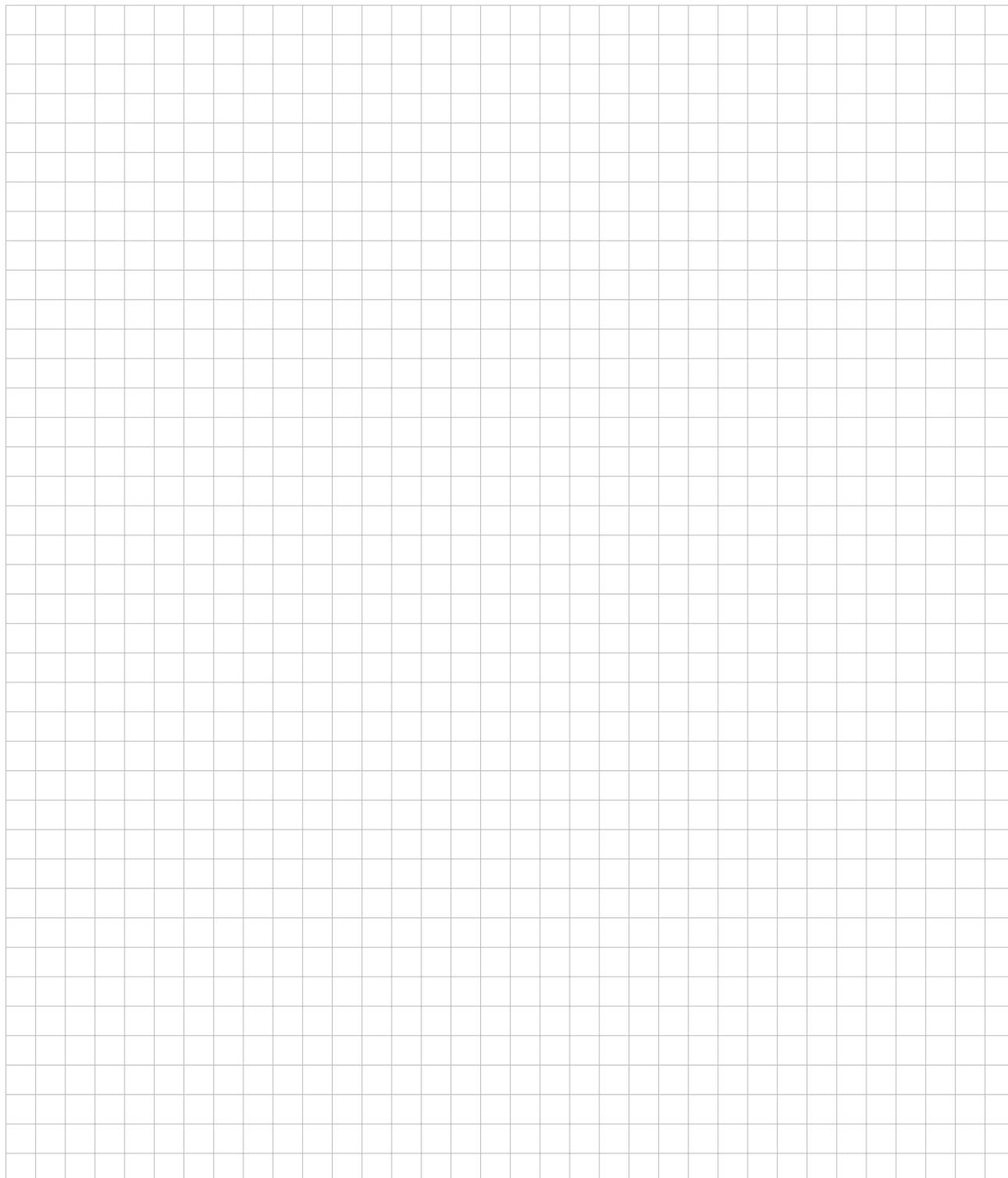


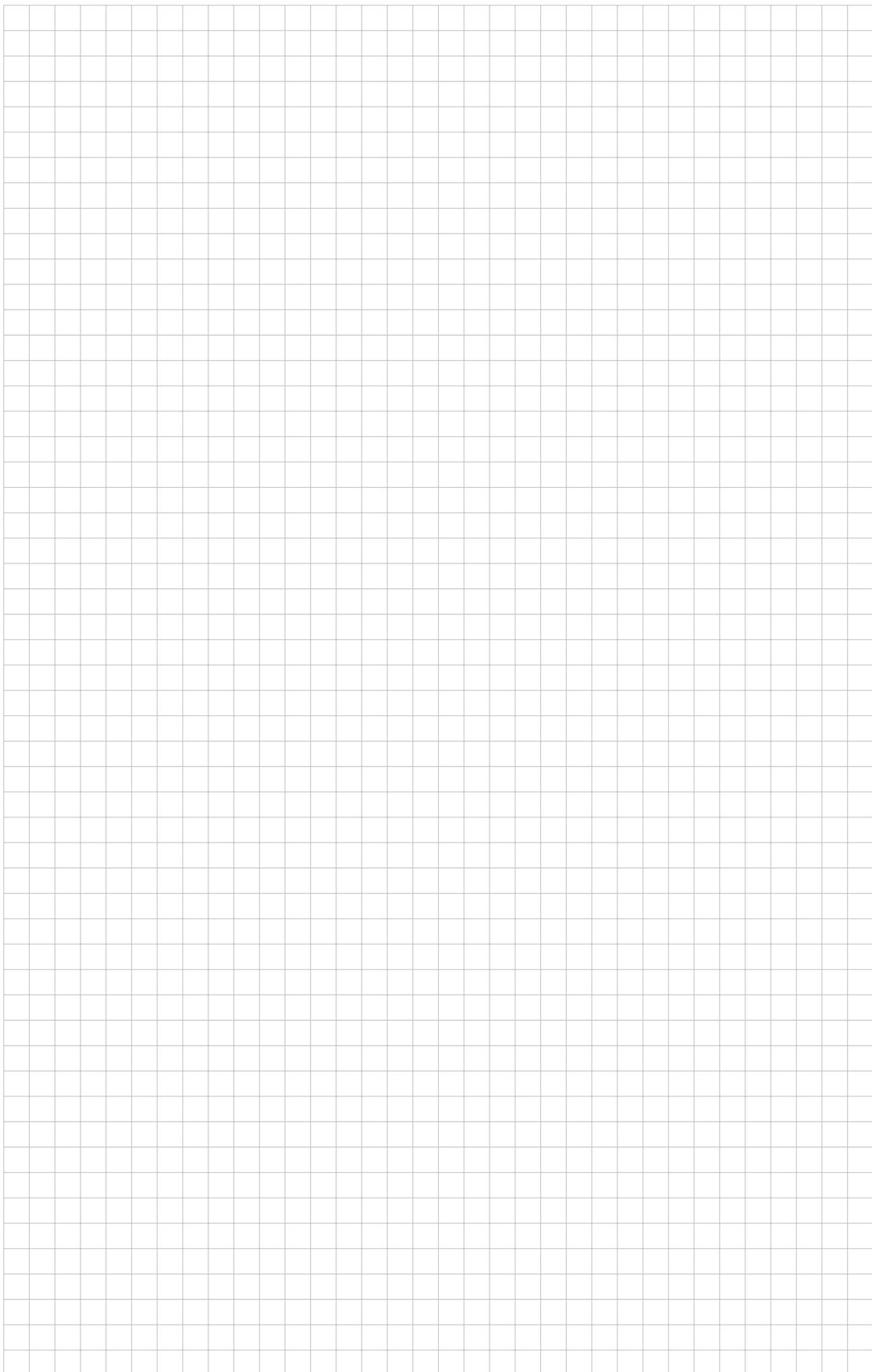
**Aufgabe 4:** (17 Punkte)

Gegeben sei die Menge

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2, x_3 < 1\}.$$

- (a) Skizzieren Sie  $S$ . (2 P.)
- (b) Zeigen Sie, daß  $S$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist. (3 P.)
- (c) Bestimmen Sie den Tangentialraum  $T_p S$  sowie den Normalenraum von  $N_p S$  an dem Punkt  $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T \in S$ . (4 P.)
- (d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von  $S$ . (8 P.)





**Aufgabe 5:** (10 Punkte)

Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 - 3t + 2 \\ 12 - 3t^2 \end{pmatrix}.$$

