Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020
1. Klausur

Analysis 2

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Alle Hilfsmittel in Papierform sind erlaubt; *elektronische Hilfsmittel sind verboten.*
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben mit unterschiedlicher Punktzahl und insgesamt 60 Punkten. Man hat bestanden, wenn man mindestens 30 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Summe**
10	12	11	17	10	60

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Gegeben sei die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_3| \leq 5,\ x_3^2 + 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2 + 4\}\,.$$

(a) Skizzieren Sie M. (3 P.)

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^3}(M)$. (7 P.)

Aufgabe 2: (12 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(a) Jeder metrische Raum (X, d) ist Hausdorffsch. (4 P.)

(b) In einem metrischen Raum (X, d) sind offene Kugeln

$$B_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\} \qquad (a \in X, r > 0)$$

niemals abgeschlossen. (4 P.)

(c) Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann bildet f offene Mengen auf offene Mengen ab. (4 P.)

Aufgabe 3: (11 Punkte)
Betrachtet sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto e^x \cos y + e^y \cos x \,.$$

(a) Zeigen Sie, daß

$$\det\left[\mathrm{Hess}\, f(x,y)\right] \leq 0$$

für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. (4 P.)

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), daß f keine lokalen Extremstellen besitzt. (7 P.)

Aufgabe 4: (17 Punkte)

Gegeben sei die Menge

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 < 1\}.$$

(a) Skizzieren Sie S. (2 P.)

(b) Zeigen Sie, daß S eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. (3 P.)

(c) Bestimmen Sie den Tangentialraum T_pS sowie den Normalenraum von N_pS an dem Punkt $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T \in S$. (4 P.)

(d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S. (8 P.)

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 - 3t + 2 \\ 12 - 3t^2 \end{pmatrix}.$$