Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020
Probeklausur

Analysis 2

Name:

Matrikelnummer:

Benötigen Sie die Studienleistung?
(Nur für Lehramt.)

Ja: ☐ Nein: ☐

Wichtige Informationen:

- Alle Hilfsmittel in Papierform sind erlaubt; *elektronische Hilfsmittel sind verboten.*
- Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Die Klausur besteht aus drei Aufgaben (je 10 Punkte). Man hat bestanden, wenn man mindestens 15 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

1	**2**	**3**	**Summe**

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Betrachtet sei

$$M = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$$

und $M^\times := M \setminus \{0\}$.

(a) Zeigen Sie, daß $M^\times$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist. (6 P.)

(b) Ist M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$? (4 P.)

Aufgabe 2: (10 Punkte)

(a) Warum sind Gerade $\mathbb{R}$ und Kreis $\mathbb{S}^1$ nicht zueinander homöomorph? (4 P.)

(b) Geben Sie ein Beispiel einer nicht Hausdorffschen Topologie $\mathcal{T}_X$ auf einer Menge X an mit $|\mathcal{T}_X| \geq 3$. (3 P.)

(c) Richtig oder falsch. Begründen Sie Ihre Antwort. In einem vollständigen metrischen Raum (X, d) ist jede beschränkte und absgeschlossene Menge kompakt. (3 P.)

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - xy^2.$$

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion f. (7 P.)

(b) Existieren globale Extrema? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 P.)