Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

10. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 10.1 Schauen Sie die folgenden Filme über das Möbiusband, den Projektiven Raum und das Möbiusband und den Projektiven Raum.

Präsenzaufgabe 10.2 Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Für eine $k+1$-Form α auf U und ein C^1-Vektorfeld $V : U \to \mathbb{R}^n$ sei $\iota_V\alpha$ die k-Form auf U gegeben durch

$$(\iota_V\alpha)_x(X_1,\dots,X_k) := \alpha_x(V(x),X_1,\dots,X_k) \qquad \big(x\in U, X_1,\dots,X_k\in\mathbb{R}^n\big).$$

Man nennt $\iota_V\alpha$ die Kontraktion von α mit V. Die *Lie-Ableitung* $\mathcal{L}_V\alpha$ von α bezüglich V ist definiert als

$$\mathcal{L}_V\alpha = d\big(\iota_V\alpha\big) + \iota_V\big(d\alpha\big).$$

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{L}_V f$ für eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$.

(b) Beweisen Sie, dass für alle k-Formen α und l-formen β auf U

$$\mathcal{L}_V(\alpha\wedge\beta) = (\mathcal{L}_V\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(\mathcal{L}_V\beta)$$

und

$$\mathcal{L}_V(d\alpha) = d(\mathcal{L}_V\alpha).$$

Sei $G = \big\{\Phi_t : t\in\mathbb{R}\big\}$ eine glatte Einparametergruppe von Diffeomorphismen auf U, d.h. für jede $t\in\mathbb{R}$ ist $\Phi_t : U\to U$ ein Diffeomorphismus, sodass

$$\Phi_0 = \mathrm{Id}$$

und

$$\Phi_s\circ\Phi_t = \Phi_{s+t} \qquad (s,t\in\mathbb{R}),$$

und die Abbildung

$$\mathbb{R}\times U\to U, \quad (t,x)\mapsto\Phi_t(x)$$

glatt ist. Sei $V : U\to\mathbb{R}^n$ das Vektorfeld, das zu G gehört, d.h. das Vektorfeld, sodass

$$\partial_t\Phi_t(x) = V\circ\Phi_t(x) \qquad (t\in\mathbb{R}, x\in U).$$

(c) Beweisen Sie für alle k-Formen α auf U die Identität

$$\partial_t\big(\Phi_t^*\alpha\big)\big|_{t=0} = \mathcal{L}_V\alpha.$$

Präsenzaufgabe 10.3 Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ und $\Phi : U\to\mathbb{R}^n$ die Abbildung gegeben durch

$$\Phi(x) = (x_1,\dots,x_k,0,\dots,0)^t \qquad (x\in U).$$

Bestimmen Sie $\Phi^*\alpha$ für eine k-Form

$$\alpha = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ \#I=k}} \alpha_I dx_I,$$

wobei $dx_I = dx_{a_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_k}$ falls $I=\{a_i : 1\le i\le k\}$ mit $a_1<a_2<\cdots<a_k$.

Hausaufgabe 10.1 Betrachten Sie $\omega = xy\,dx \wedge dy$ auf $\mathbb{R}^2$ und die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (t, v) \mapsto tv.$$

(a) Berechnen Sie $\Phi^*\omega$.

(b) Sei $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ das konstante Vektorfeld $V = (1, 0, 0)^t$. Bestimmen Sie $\iota_V\big(\Phi^*\omega\big)$.

(c) Berechnen Sie

$$\eta := \int_0^1 \iota_V\big(\Phi^*\omega\big)\,dt$$

und zeigen Sie

$$d\eta = \omega. \tag{1}$$

(d) Wird η eindeutig durch (1) bestimmt?

Hausaufgabe 10.2 [Forster, Aufgabe 20.2] Im $\mathbb{R}^4$ sei ω die Differentialform

$$\omega := x_2 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Sei $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ die Einheitssphäre.

(a) Man zeige: Für jede kompakte Teilmenge $A \subseteq S^3$ gilt

$$\int_A \omega = 0.$$

(b) Man berechne

$$\int_B x_2 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4,$$

wobei $B := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Hausaufgabe 10.3 [Forster, Aufgabe 20.8.] Im $\mathbb{R}^n$ seien $f_1, \ldots, f_n$ homogene Polynome vom Grad m in den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Sei $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Einheitssphäre. Man zeige: Ist m gerade, so ist

$$\int_{S^{n-1}} \omega = 0.$$

Anleitung: Man betrachte die Transformation $x \mapsto -x$ des $\mathbb{R}^n$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 22.1.2021, 9 Uhr via Panda.