Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

10. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 10.1 Betrachten Sie $\omega = xy\,dx \wedge dy$ auf $\mathbb{R}^2$ und die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (t, v) \mapsto tv.$$

(a) Berechnen Sie $\Phi^*\omega$.

(b) Sei $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ das konstante Vektorfeld $V = (1, 0, 0)^t$. Bestimmen Sie $\iota_V\big(\Phi^*\omega\big)$.

(c) Berechnen Sie

$$\eta := \int_0^1 \iota_V\big(\Phi^*\omega\big)\,dt$$

und zeigen Sie

$$d\eta = \omega. \tag{1}$$

(d) Wird η eindeutig durch (1) bestimmt?

Lösung:

(a)

$$\Phi^*\omega = t^2xy(x\,dt + t\,dx) \wedge (y\,dt + t\,dy) = t^4xy\,dx \wedge dy + t^3x^2y\,dt \wedge dy + t^3xy^2\,dx \wedge dt.$$

(b)

$$\iota_V\big(\Phi^*\omega\big) = t^3x^2ydy - t^3xy^2\,dx.$$

(c)

$$\eta = \int_0^1 \Big(t^3x^2y\,dy - t^3xy^2\,dx\Big)\,dt = \frac{1}{4}x^2y\,dy - \frac{1}{4}xy^2\,dx$$

(d)

$$d\eta = \frac{2}{4}xy\,dx \wedge dy - \frac{2}{4}xy\,dy \wedge dx = xy\,dx \wedge dy = \omega.$$

(e) η ist bis auf Addition von geschlossene 1-Formen Eindeutig durch (1) bestimmt.

Hausaufgabe 10.2 [Forster, Aufgabe 20.2] Im $\mathbb{R}^4$ sei ω die Differentialform

$$\omega := x_2dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_4dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + x_3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Sei $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ die Einheitssphäre.

(a) Man zeige: Für jede kompakte Teilmenge $A \subseteq S^3$ gilt

$$\int_A \omega = 0.$$

Lösung: Es gilt

$$\omega = \frac{1}{2} d(x_1^2 + x_2^2) \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \frac{1}{2} d(x_3^2 + x_4^2) \wedge dx_1 \wedge dx_2.$$

Weiter gilt

$$d(x_3^2 + x_4^2) \wedge dx_3 \wedge dx_4 = 0 = d(x_1^2 + x_2^2) \wedge dx_1 \wedge dx_2,$$

und darum

$$\omega = \frac{1}{2} d\big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\big) \wedge \big(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4\big).$$

Sei ι die Einbetting $S^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Weil die Funktion $x \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ konstant ist auf S^3, gilt

$$\iota^* d\big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\big) = 0.$$

Es folgt $\iota^* \omega = 0$ und damit $\int_A \omega = 0$ für alle Kompakta $A \subseteq S^3$.

Hausaufgabe 10.3 [Forster, Aufgabe 20.8.] Im $\mathbb{R}^n$ seien $f_1, \ldots, f_n$ homogene Polynome vom Grad m in den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Sei $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Einheitssphäre. Man zeige: Ist m gerade, so ist

$$\int_{S^{n-1}} \omega = 0.$$

Lösung: Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\Phi(x) = -x$. Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi(S^{n-1}) &= S^{n-1}, \\ \Phi^* \omega &= (-1)^{m+n-1} \omega. \end{aligned}$$

Wir wählen eine Orientierung von $\mathbb{R}^n$ und orientieren S^{n-1} so, dass das äußere Einheitsnormalenfeld positiv ist. Die Abbildung Φ ist orientierungstreu, wenn n gerade, und orientierungsumkehrend, wenn n ungerade ist. Das Einheitsnormalenfeld wird unter die Tangentialabbildung von Φ auf sichselbst abgebildet. Es folgt, dass die Einschränkung $\Phi\big|_{S^{n-1}}$ genau dann orientierungstreu ist, wenn n gerade ist.

Nehme jetzt an, dass m gerade ist. Wenn n gerade ist, dann ist $\Phi\big|_{S^{n-1}}$ orientierungstreu und deshalb

$$\int_{S^{n-1}} \omega = -\int_{S^{n-1}} \Phi^* \omega = -\int_{\Phi(S^{n-1}} \omega = -\int_{S^{n-1}} \omega.$$

Wenn n ungerade ist, dann ist $\Phi\big|_{S^{n-1}}$ orientierungsumkehrend und deshalb

$$\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{S^{n-1}} \Phi^* \omega = -\int_{\Phi(S^{n-1}} \omega = -\int_{S^{n-1}} \omega.$$

In beide Fälle folgt

$$\int_{S^{n-1}} \omega = 0.$$