

Analysis 3

11. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 11.1 Beweisen Sie, dass eine kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ keinen Rand hat.

Präsenzaufgabe 11.2 [Forster, Aufgabe 21.3] Man beweise $H_{DR}^1(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \simeq \mathbb{R}$.
Anleitung: Die Cohomologieklassse der Differentialform

$$\sigma := \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

bildet eine Basis von $H_{DR}^1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$. Dazu beweise man: Ist ω eine geschlossene 1-Form in $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ mit

$$\int_{S^1} \omega = 0,$$

so besitzt ω eine Stammfunktion.

Präsenzaufgabe 11.3 [Forster 21.7] Es sei $q : \mathbb{R}^n \setminus 0 \rightarrow S^{n-1}$ die Projektion auf die Einheitssphäre

$$q(x) := \frac{x}{\|x\|} \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus 0).$$

Für eine kompakte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus 0$ versteht man unter dem Raumwinkel, unter dem A vom Nullpunkt aus erscheint, die Größe

$$\Theta(A) := \text{Vol}_{n-1}(q(A)).$$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n \setminus 0$ eine Hyperfläche mit folgender Eigenschaft:

- (i) Die Abbildung $q|_M : M \rightarrow S^{n-1}$ ist injektiv.
- (ii) Für jedes $a \in M$ gilt $\mathbb{R}a + T_a M = \mathbb{R}^n$.

Man zeige:

- (a) M ist orientierbar.
- (b) Für jedes Kompaktum $A \subseteq M$ gilt

$$\Theta(A) = \left| \int_A \sigma \right|,$$

wobei

$$\sigma := \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1} x_i}{\|x\|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Hausaufgabe 11.1 [Forster, Aufgabe 20.5] Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche. Es gebe eine stetige Abbildung $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$\nu(p) \notin T_p M$$

für alle $p \in M$. Man zeige, dass M orientierbar ist.

Hausaufgabe 11.2 Sei $C \subseteq \mathbb{R}^3$ die Ellipse ist, die durch die Gleichungen $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, z = 1$ bestimmt wird. Orientieren Sie C so, dass der Vektor $(0, 1, 0)^t$ eine positiv orientierte Basis von $T_{(2,0,1)}C$ ist. Berechnen Sie das Integral

$$\int_C (x + z) dx + (x - y) dy + x dz$$

sowohl direkt als mit Hilfe von dem Satz von Stokes.

Hausaufgabe 11.3 Betrachten Sie den Zylinder

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}.$$

Orientieren Sie C , so dass das Normalenfeld

$$\nu : x \mapsto (x_1, x_2, 0)$$

positiv ist. Seien

$$S_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 1\} \quad \text{und} \quad S_- = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

Bemerke, dass $\partial C = S_+ \cup S_-$. Versehen Sie $S_{\pm}$ mit die von C induzierte Orientierung. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{S_+} zy^2 dx + \sin(z)xy dy$$

sowohl direkt als mit Hilfe von dem Satz von Stokes.