

Analysis 3

11. Übungsblatt *Ausgewählte Lösungen*

Hausaufgabe 11.2 Sei $C \subseteq \mathbb{R}^3$ die Ellipse ist, die durch die Gleichungen $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 1$ bestimmt wird. Orientieren Sie C so, dass der Vektor $(0, 1, 0)^t$ eine positiv orientierte Basis von $T_{(2,0,1)}C$ ist. Berechnen Sie das Integral

$$\int_C (x + z) dx + (x - y) dy + x dz$$

sowohl direkt als mit Hilfe von dem Satz von Stokes.

Lösung: Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ 3 \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die Abbildung γ ist ein glatte Weg und parametrisiert C . Die Vektor $\gamma'(0) = (0, 3, 0)^t$ ist ein positives Vielfach von $(0, 1, 0)^t$. Darum ist γ positiv orientiert. Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_C (x + z) dx + (x - y) dy + x dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \cos(t) + 1 \\ 2 \cos(t) - 3 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ 3 \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -4 \cos(t) \sin(t) - 2 \sin(t) + 6 \cos^2(t) - 9 \cos(t) \sin(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{13}{2} \sin(2t) - 2 \sin(t) + 3 \cos(2t) + 3 dt \\ &= 6\pi. \end{aligned}$$

Sei $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1, z = 0\}$ und sei $\Phi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r, \phi) = \begin{pmatrix} 2r \cos(\phi) \\ 3r \sin(\phi) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi).$$

Die Abbildung Φ ist glatt und parametrisiert $\overline{X}$.

Wir orientieren X so, dass die von X auf C induzierte Orientierung die gegebene Orientierung ist. Weil $\partial_r \Phi(1, 0) = (2, 0, 0)^t$ eine äußere Normalenvektor von $\overline{X}$ an der Stelle $(2, 0, 1)$ und $\partial_\phi \Phi(0, 1) = (0, 3, 0)^t$ ein positives Vielfach von $(0, 1, 0)$ ist, ist Φ positiv orientiert. Es gilt

$$d((x + z) dx + (x - y) dy + x dz) = dz \wedge dx + dx \wedge dy + dx \wedge dz = dx \wedge dy.$$

Nach der Satz von Stokes gilt

$$\begin{aligned} & \int_C (x+z) dx + (x-y) dy + x dz \\ &= \int_X dx \wedge dy \\ &= \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} d(2r \cos(\phi)) \wedge d(3r \sin(\phi)) \\ &= \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} 6(\cos(\phi) dr - r \sin(\phi) d\phi) \wedge (\sin(\phi) dr + r \cos(\phi) d\phi) \\ &= \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} 6r(\cos^2(\phi) dr \wedge d\phi - \sin^2(\phi) d\phi \wedge dr) \\ &= \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} 6r dr \wedge d\phi \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 6r d\phi dr \\ &= 6\pi. \end{aligned}$$