Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

12. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 12.1 Bestimmen Sie die Allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

(a) $\dfrac{dy}{dt} = -2y + t.$

(b) $\dfrac{dy}{dt} = 4t\sqrt{y}, \quad y \geq 0.$

Lösung

(a) Wir betrachten den Ansatz $y(t) = e^{-2t}c(t)$. Es gilt

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2e^{-2t}c(t) + e^{-2t}\frac{dc(t)}{dt} = -2y(t) + e^{-2t}\frac{dc(t)}{dt}.$$

Es folgt

$$e^{-2t}\frac{dc(t)}{dt} = t.$$

Die Funktion $t \mapsto \frac{1}{4}e^{2t}(2t-1) + c$ ist eine Stammfunktion von $t \mapsto e^{2t}t$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass

$$y(t) = \frac{2t-1}{4} + ce^{-2t} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

die Allgemeine Lösung ist.

(b) Wir verwenden die Methode der Trennung der Veränderlichen. Es gilt

$$2t^2 - 2t_0^2 = \int_{t_0}^{t} 4x\,dx = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0}.$$

Es folgt

$$y(t) = \left(t^2 - t_0^2 + \sqrt{y_0}\right)^2.$$

Die Funktion $y : t \mapsto (t^2 + c)^2$ erfüllt nur dann die Differentialgleichung, wenn $t^2 + c \geq 0$. Weiter ist $y(t) = 0$ eine Lösung. Wir bekommen damit die folgende Lösungen:

$$y(t) = (t^2 + c)^2$$

mit $c > 0$ und

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \big(t \in (-\infty, \sqrt{c}]\big) \\ (t^2 + c)^2, & \big(t \in (\sqrt{c}, \infty)\big) \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \big(t \in [-\sqrt{c}, \infty)\big) \\ (t^2 + c)^2, & \big(t \in (-\infty, -\sqrt{c}]\big) \end{cases}$$

mit $c \leq 0$ und $y = 0$.

Präsenzaufgabe 12.2 Bestimmen Sie die Lösung der folgdenden Anfangswertprobleme

(a) $\dfrac{dy}{dt} = ty + 1, \quad y(1) = \sqrt{e}.$

(b) $\dfrac{dy}{dt} = e^{y-t}, \quad y(2) = -1.$

(a) Wir verwenden die Methode der Variation der Konstanten. Wir machen dazu den Ansatz $y(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}c(t)$. Es gilt

$$\frac{dy(t)}{dt} = te^{\frac{1}{2}t^2}c(t) + e^{\frac{1}{2}t^2}\frac{dc(t)}{dt} = ty(t) + e^{\frac{1}{2}t^2}\frac{dc(t)}{dt}.$$

Es folgt

$$e^{\frac{1}{2}t^2}\frac{dc(t)}{dt} = 1$$

und damit

$$c(t) = \int_1^t e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds + d.$$

für ein $d \in \mathbb{R}$. Wir schließen, dass y gegeben wird durch

$$y(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}\int_1^t e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds + de^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Die Anfangswertbedingung impliziert $d = 1$.

(b) Wir setzen $z = y - t$ ein. Es gilt

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt} - 1 = e^{y-t} - 1 = e^z - 1.$$

Bemerke, dass

$$\frac{d}{dt}\big(-\log(c-t)\big) = \frac{1}{c-t} = e^{-\log(c-t)}.$$

Wir machen jetzt den Ansatz $z(t) = -\log(c(t) - t)$. Es gilt

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{1 - c'(t)}{c(t) - t}.$$

Es folgt, dass $c(t)$ die Differentialgleichung $c'(t) = c(t) - t$ erfüllt. Mit der Methode der Variation der Konstanten folgt

$$c(t) = de^t + t + 1$$

mit $d \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$z(t) = -\log(de^t + 1)$$

und

$$y(t) = t - \log(de^t + 1).$$

Weil $y(2) = -1$, gilt $d = e - e^{-2}$.

Präsenzaufgabe 12.3 Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems in $\mathbb{R}^2$

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Wir benützen die Methode der Variation der Konstanten und machen den Ansatz

$$y(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} c(t).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} c(t) + \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} c'(t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} c'(t). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} c'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

und damit

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & -\sinh(t) \\ -\sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t\sinh(t) \\ t\cosh(t) \end{pmatrix}$$

Die Funktionen $t \mapsto -t\cosh(t) + \sinh(t) + d_1$ und $t \mapsto t\sinh(t) - \cosh(t) + d_2$, mit $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, sind Stammfunktionen von $t \mapsto -t\sinh(t)$ und $t \mapsto t\cosh(t)$. Darum folgt

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t\cosh(t) + \sinh(t) + d_1 \\ t\sinh(t) - \cosh(t) + d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Anfangswertbedingung impliziert $d_1 = 2$ und $d_2 = 1$. Die Lösung ist damit

$$y(t) = \begin{pmatrix} -t + 2\cosh(t) + \sinh(t) \\ -1 + 2\sinh(t) + \cosh(t) \end{pmatrix}.$$