Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

13. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 13.1 Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = fe^{i\omega t}, \tag{1}$$

wobei m, c, k, f, ω reelle Konstanten sind. Beschreiben Sie die Lösungen. Was passiert, wenn $c = 0$ und $k = m\omega^2$?

Lösung: Nach dem Satz von Picard-Lindelöf wird jede Lösung von (1) eindeutig von den Anfangswerte bestimmt, das heißt eine Lösung $y(t)$ wird durch $y(0)$ und $y'(0)$ bestimmt. Dies gilt auch für die homogene Differentialgleichung

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0. \tag{2}$$

Sei y_p eine Lösung von (1). Dann ist y genau dann eine Lösung von (1), wenn $y_h = y - y_p$ eine Lösung von (2) ist.

Wir bestimmen zuerst die Lösungen von (2). Wir machen den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$. Es gilt

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = \big(m\lambda^2 + c\lambda + k\big)e^{\lambda t}$$

Wir definieren das Polynom

$$P(x) = mx^2 + cx + k.$$

Es folgt, dass $t \mapsto e^{\lambda t}$ genau dann eine Lösung von (2) ist, wenn $P(\lambda) = 0$. Die Nullstellen von P sind

$$\lambda_\pm = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}.$$

Wir nehmen zuerst an, dass $\lambda_+ \neq \lambda_-$. Da die Lösungsmenge von (2) eine 2-dimensionale Vektorraum ist, werden alle Lösungen von (2) gegeben durch

$$y_h(t) = C_+e^{\lambda_+ t} + C_-e^{\lambda_- t} \qquad (C_\pm \in \mathbb{C}).$$

Nehme, jetzt an, dass $\lambda_+ = \lambda_- =: \lambda$, dass heißt $c^2 = 4mk$ und $\lambda = -\frac{c}{2m}$. Dann

$$m\frac{d^2}{dt^2}te^{\lambda} + c\frac{d}{dt}te^{\lambda} + kte^{\lambda t} = \big(m\lambda^2 + c\lambda + k\big)te^{\lambda t} + \big(2m\lambda + c\big)e^{\lambda t} = 0.$$

Die Lösungen von (2) sind darum

$$y_h(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t} \qquad (C_{1,2} \in \mathbb{C}).$$

Jetzt bestimmen wir eine Lösung $y = y_p$ von (1). Wir machen den Ansatz $y(t) = Ce^{i\omega t}$. Es gilt

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = C\big(-m\omega^2 + ic\omega + k\big)e^{i\omega t} = CP(i\omega)e^{i\omega t}.$$

Wenn $P(i\omega) \neq 0$, dann ist $y_p(t) = \frac{1}{P(i\omega)}e^{i\omega t}$ eine Lösung. Wenn $P(i\omega) = 0$, dann machen wir den Ansatz $y(t) = Cte^{i\omega t}$. Es gilt

$$\begin{aligned} my''(t) + cy'(t) + ky(t) &= C\big(-m\omega^2 t + 2im\omega + c + ict\omega + kt\big)e^{i\omega t} \\ &= C\big(P(i\omega)t + P'(i\omega)\big)e^{i\omega t} = CP'(i\omega)e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Wenn $P'(i\omega) \neq 0$, dann ist $y_p(t) = \frac{1}{P'(i\omega)} t e^{i\omega t}$ eine Lösung von (1). Wenn $P(i\omega) = P'(i\omega) = 0$, dann machen wir den Ansatz $y(t) = Ct^2 e^{i\omega t}$. Es gilt

$$\begin{aligned} my''(t) + cy'(t) + ky(t) &= C\big(- m\omega^2 t^2 + 4im\omega t + 2m + ic\omega t^2 + 2ct + k\big) e^{i\omega t} \\ &= C\big(P(i\omega)t^2 + P'(i\omega)t + 2m\big) e^{i\omega t} = 2Cme^{i\omega} t. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist $y_p(t) = \frac{1}{2m} t^2 e^{i\omega t}$ eine Lösung von (1).

Wenn $c = 0$ und $k = m\omega^2 > 0$, dann gilt $\lambda_+ = i\sqrt{\frac{k}{m}} = -\lambda_-$ und $P(i\omega) = 0$, aber $P'(i\omega) = im\omega \neq 0$. Die Lösungen von (1) werden gegeben durch

$$y(t) = C_+ e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}} + C_- e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}} + \frac{t}{im\omega} e^{i\omega t} \qquad (C_\pm \in \mathbb{C}).$$