Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

2. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 2.3 [Soergel, Übung 1.2.34] Zeigen Sie, daß es höchstens ein normiertes translationsinvariantes topologisches Maß λ auf $\mathbb{R}$ geben kann.
Lösung:

(a) Wir zeigen zunächst, dass $\lambda(\{a\}) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Wegen Translationsinvarianz gilt

$$\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \lambda(\{a\}) = \sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \lambda(\{x\}) = \lambda\big(\mathbb{Q}\cap[0,1]\big) \leq \lambda([0,1]) = 1.$$

Es folgt, dass $\lambda(\{a\}) = 0$. Aus diese Ausage folgt insbesondere, dass für $a < b$

$$\lambda\big([a,b]\big) = \lambda\big((a,b]\big) = \lambda\big([a,b)\big) = \lambda\big((a,b)\big).$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wegen Translationsinvarianz und (a) gilt

$$\lambda\big([0,\frac{1}{n}]\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda\big([\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]\big) = \frac{1}{n}\lambda\big([0,1]\big) = \frac{1}{n}.$$

(c) Wenn $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$, dann gibt es $p, q \in \mathbb{N}$, sodass $b - a = \frac{p}{q}$. Wegen (a), (b) und Translationsinvarianz gilt

$$\lambda([a,b]) = \lambda([0,b-a]) = \lambda\big([0,\frac{p}{q}]\big) = \sum_{k=1}^{p} \lambda\big([\frac{k-1}{q},\frac{k}{q})\big) = p\lambda\big([0,\frac{1}{q})\big) = \frac{p}{q} = b-a.$$

(d) Wenn $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, dann gibt es eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein monoton steigende Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}\cap(a,b)$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen $A_n := [a_n, b_n]$ ist aufsteigend und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (a,b)$. Nach Präsenzaufgabe 1.2 und (c) gilt

$$\lambda([a,b]) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\big(A_n\big) = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = b - a.$$

(e) Nach (d) ist λ ein Prämaß mit die Eigenschaft

$$\lambda(I) = \sup(I) - \inf(I)$$

für jedes nichtleere beschränkte Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Lemma 1.2.6 impliziert, dass dieses Prämass und das Lebesguemaß gesehen als Prämass gleich sind. Aus Satz 1.2.10 folgt jetzt, dass λ das Lebesguemaß ist.